Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Экономический факультет

Моделирование и прогнозирование социально-экономических процессов

Москва
2002

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Экономический факультет

Моделирование и прогнозирование социально-экономических процессов

Под ред. Сидоренко В.Н.

Москва
2002

УДК 502
ББК 65.28
М 74

Рецензент профессор Ю.Н. Черемных

М74 Моделирование и прогнозирование социально-экономических процессов / Под ред. В.Н. Сидоренко – М.: 2002. – 95 с.

ISBN

В предлагаемой работе содержатся материалы научно-практического семинара "Моделирование и прогнозирование социально-экономических процессов", прошедшего 7 декабря 1999 г. на экономическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова под эгидой Совета молодых ученых экономического факультета.

ББК 65.28

M74 Modeling and Forecasting of Social-Economic Processes / Under reduction of V.N. Sidorenko. – Moscow, 2002. – 95 p.

This book contains the materials of the scientific and practical seminar "Modeling and Forecasting of Social-Economic Processes" carried out by Young Scientists Council of M.V. Lomonosov Moscow State University on December 07 in 1999.

Напечатано с оригинал-макета авторов
Макетирование, компьютерная верстка Вереникина А.О.

ISBN

Содержание

Равновесие на рынке двусторонней монополии
Вереникин А.О. ________________________________ 3

Математическое моделирование связи уровня неравенства с темпами роста экономики России
Вишневский Р.В. ________________________________ 18

Системно-динамическое моделирование экономического роста
Сидоренко В.Н. ________________________________ 34

Оптимальное управление инвестициями
Антипов Д.В. ________________________________ 47

Оптимальные вложения в научно-технический прогресс
Антипов Е.В. ________________________________ 62

Выбор стратегии продаж (игровой подход)
Дармостук А.А. ________________________________ 79

Contents

Partial Equilibrium in Bilateral Monopoly
Verenikin A.O. ____________________ 3

Mathematical Modeling of Correlation between Inequality Level and Growth Rates of Russian Economy
Vishnevsky R.V. ____________________ 18

System Dynamic Modeling of Economic Growth
Sidorenko V.N. ____________________ 34

Optimal Development of the Economy
Antipov D.V. ____________________ 47

Optimum Investments in Scientific and Technical Progress
Antipov E.V ____________________ 62

Selection of Sale Strategy
Darmostuk A. ____________________ 79

Равновесие на рынке двусторонней монополии

Вереникин А.О.

Традиционной точкой зрения, отраженной в многочисленных учебниках по микроэкономической теории, является отсутствие локального равновесия на рынке, на котором монополии со стороны предложения противостоит монопсония со стороны предложения, то есть на рынке двусторонней монополии. В предлагаемой работе с помощью построения функции предложения монополии как возрастающей трансформации функции предельных издержек и функции спроса монопсонии как возрастающей трансформации функции предельной доходности ресурса показывается обратное – существование локального равновесия на рынке двусторонней монополии. Искомое равновесие находится как равенство значений данных функций.

Partial Equilibrium in Bilateral Monopoly

Verenikin A.O.

The common statement of typical microeconomic textbooks claims absence of local partial equilibrium in bilateral monopoly, i.e. in the market with monopoly at supply side and monopsony at demand side. The paper shows with the means of supply schedule for monopoly as increasing transformation of marginal cost curve and demand schedule as increasing transformation of marginal revenue product curve that on the contrary the local equilibrium exists. It can be found as the intersection of the demand and supply curves.

Проанализируем поведение монополии как рыночной структуры, принимая предпосылку о том, что целью деятельности фирмы является максимизация прибыли. Рассмотрим вначале теорию монополии, как она излагается современной экономической теорией. Под монополией понимается такая рыночная структура, при которой одна фирма является поставщиком на рынок продукта, не имеющего близких заменителей. Монополия тождественна отрасли. Монопольная власть тем больше, чем выше входные барьеры в отрасль и чем меньше заменителей у товара. Так как монополист является единственным продавцом на данном отраслевом рынке, он полностью контролирует объем предложения и рыночную цену. Основной целью монополии традиционно считается максимизация функции прибыли π, задаваемой как разность между функцией общего дохода, или общей выручки, TR[1], причем $TR = P(q)q$, где $P(q)$ – функция спроса, а q – объем предложения монополии, и функцией общих издержек TC[2], выводимой из производственной функции, которой характеризуются технологические процессы на данном предприятии. Итак, $\pi(q) = TR(q) - TC(q)$. Необходимым условием максимума функции прибыли является равенство нулю первой производной по объему выпуска, при предположении о дифференцируемости данной функции:

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ} = 0\,.$$

Производная общего дохода обозначается MR и называется предельным доходом[3], а производная общих издержек обозначается MC и называется предельными издержками[4]. Поэтому необходимое условие максимума прибыли можно записать в виде равенства:

$$MR = MC.$$

[1] Аббревиатура от аналогичного английского термина "total revenue".
[2] Аббревиатура от аналогичного английского словосочетания "total cost".
[3] От англ. "marginal revenue".
[4] От англ. "marginal cost".

Данную теорию монополии можно изложить альтернативным способом, используя не функции предельного дохода и предельных издержек, а функции спроса на продукцию монополии и предложения.

Традиционным заблуждением в экономической теории является точка зрения, согласно которой у монополии отсутствует функция предложения. Можно полностью согласиться с тем утверждением, что функция предложения монополии отлична от функции предельных издержек. Функция предложения, совпадающая с функцией предельных издержек, характерна лишь для ситуации совершенной конкуренции, то есть случая, когда цена для фирмы задается экзогенно в результате взаимодействия отраслевого спроса и предложения. Монополия же сама устанавливает рыночную цену. Однако тезис о том, что у монополии в принципе отсутствует функция предложения, то есть зависимость между объемом выпускаемой продукции и оптимальной для монополиста ценой, в корне неверен. Опровергнем его, построив искомую функцию предложения. Кроме того, покажем, что функция предложения представляет собой монотонную трансформацию функции предельных издержек. Поэтому искомая функция предложения может рассматриваться как различные сочетания оптимальных цен и объемов выпуска при меняющихся издержках.

Необходимым условием максимума функции прибыли

$$\pi(Q) = TR - TC,$$

где $TR = P\cdot Q$ – общая выручка фирмы, $TC = TC(Q)$ – общие издержки, Q – объем выпуска, - является равенство нулю ее первой производной по количеству выпускаемой продукции:

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ} = 0 .$$

Введем традиционные обозначения: $\frac{dTR}{dQ} = MR$ и $\frac{dTC}{dQ} = MC$. Тогда в этих обозначениях имеем:

$$MR = \frac{d}{dQ}(P(Q)\cdot Q) = P(Q) + \frac{dP}{dQ}Q =$$

$$= p(Q)\left(1 + \frac{dP(Q)}{dQ}\cdot\frac{Q}{P(Q)}\right) = P\left(1 + \frac{1}{E_p^d}\right) = MC,$$

где $E^d{}_p$ – эластичность функции спроса по цене. Отсюда следует, что

$$P = \frac{MC}{1 + \frac{1}{E_p^d}} . \qquad (1)$$

Уравнение (1) показывает, что утверждение об отсутствии функции предложения для монополии, традиционное для ряда авторов отечественных и зарубежных учебников по микроэкономике[5] является ошибочным.

Уравнение (1), представляющее собой зависимость между оптимальным объемом производства для монополии и той ценой, по которой она готова этот объем производства предложить рынку, как раз и является искомой функцией предложения фирмы – монополии. В чем правы критикуемые нами теоретики – микроэкономисты, так это в том, что

[5] См.: *Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И.* Микроэкономика / Общая редакция В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа, 1997, Т.2, С.87-89.

функция предложения монополии отлична от функции предельных затрат *MC*. Действительно, функция предложения затрат *MC* в правой части формулы (1) делится на коэффициент, равный величине, обратной эластичности спроса по цене, увеличенной на единицу. Монопольная цена в тем большей степени отклоняется от конкурентной, равной предельным издержкам (*MC*), чем менее эластичен спрос по цене. Однако этот факт не может поставить под сомнение само существование функции предложения монополии. Особенностью функции предложения монополии является то, что оптимальная для монополии цена, по которой она будет предлагаться продукцию, является неубывающей функцией предельных издержек (*MC*)[6]. Для того, чтобы это показать, введем две альтернативные дифференцируемые функции краткосрочных затрат TC_1 и TC_2 и предположим, что $MC_2(q) > MC_1(q)$ для всех $q > 0$, где $MC_i = TC_i'$.

Допустим далее, что монополист, обладая функцией издержек TC_1 назначит цену P_1 и выберет количество продукции q_1, а при функции затрат TC_2 цена будет P_2, а объем выпуска q_2. Применяя аксиому выявленной максимальной прибыли, получаем, что

$$P_1q_1 - TC_1(q_1) \geq P_2q_2 - TC_1(q_2), \qquad (2)$$

так как при функции издержек TC_1 назначение цены на уровне P_1 и выбор объема производства q_1, даст, по крайней мере, не меньшую прибыль, чем любое другое сочетание цены и количества, в частности P_2 и q_2.

Аналогично при функции издержек TC_2 в силу аксиомы выявленной максимизации прибыли имеем:

$$P_2q_2 - TC_2(q_1) \geq P_1q_1 - TC_2(q_1) \qquad (3)$$

Сложим неравенства (2) и (3). Получаем:

[6] См.: *Тироль Ж.* Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности / Пер. с англ. – СПб.: Экономическая школа, 1996, С. 99.

$$[TC_2(q_1) - TC_2(q_2)] - [TC_1(q_1) - TC_1(q_2)] \geq 0 \qquad (4)$$

Так как в краткосрочном периоде $TC = VC + FC$, где VC – переменные издержки[7], FC – постоянные издержки[8], можно заметить, что постоянные издержки в неравенстве (4) сокращаются и его можно переписать в другом виде:

$$[VC_2(q_1) - VC_2(q_2)] - [VC_1(q_1) - VC_1(q_2)] \geq 0 \qquad (4')$$

Неравенство (4′) можно привести к следующему виду (правильность проверяется непосредственно интегрированием):

$$\int_{q_2}^{q_1} (MC_2(q) - MC_1(q))dq \geq 0 \qquad (5)$$

Вспомним, что мы предполагали $MC_2(q) > MC_1(q)$. Так как подынтегральная функция неотрицательна, то интеграл (5) может быть неотрицательным только, если верхний предел интегрирования не меньше нижнего, то есть $q_1 \geq q_2$. Учитывая, что объем спроса (q) является убывающей функцией цены (p), получаем, что при $MC_2(q) > MC_1(q)$, $P_2 > P_1$. Соединяя точки краткосрочного равновесия, получим, что в долгосрочном периоде из условия $MC(q_1) \geq MC(q_2)$ будет следовать $p_1 \geq p_2$. Таким образом, мы получили, что оптимальная цена предложения монополии - неубывающая функция предельных затрат.

Теоретический анализ значительно усложняется, если на отдельном рынке монополии на стороне предложения противостоит монопсония в качестве единственного покупателя ее товара. Этот случай в экономическом анализе называется двусторонней монополией. Такое противостояние в западной практике встречается тогда, когда встречаются

---

7 От англ. variable cost.

8 От англ. fixed cost.

крупная монополия и отраслевой профсоюз. В отечественной экономике данная ситуация наблюдается гораздо чаше при взаимодействии узкоспециализированного поставщика с крупным предприятием – потребителем его продукции. Типичной для современной микроэкономической теории является точка зрения, утверждающая отсутствие в этом случае единственного равновесия на данном отраслевом рынке. Утверждается, что равновесные объемы производства и уровни цены будут колебаться между оптимальными для случая отдельно монополии и монопсонии. Конкретные параметры рынка будут зависеть от сравнительной переговорной силы вертикально конкурирующих фирм.[9]

[9] Представление о типичных взглядах на данную проблему дает позиция автора одного из учебников по микроэкономической теории Д.Н. Хаймана. Он пишет:

"Когда монополист сталкивается с монополией, в результате можно наблюдать картину, напоминающую битву титанов. Можно только гадать о возможных последствиях для участников.

На рисунке ["Двусторонняя монополия"] линия S – кривая предложения рабочей силы. Она указывает на цену рассматриваемого производственного ресурса, которую необходимо заплатить для привлечения определенного количества услуг этого ресурса. Так как фирма, закупающая ресурс, является монопсонией, она захочет установить цену на уровне $W_м$, необходимом для привлечения количества услуг ресурса, соответствующего пересечению кривой MIC с кривой ее MRP фирмы. Это пересечение происходит в точке E_1. В этой точке фирма захочет нанять $L_м$ единиц услуг данного ресурса. Поэтому она предложит цену в размере $W_м$ долларов за час услуг ресурса – цену, необходимую для привлечения $L_м$ единиц услуг ресурса.

Для максимизации прибыли монопольный продавец должен оценить спрос на услуги рассматриваемого ресурса. Затем он будет стремиться установить такую цену, которая побудит нанимателя ресурса приобрести количество услуг ресурса, соответствующего точке, где предельный доход от реализации услуг продаваемого фактора производства равен предельным издержкам на него. При условии, что кривая предложения услуг ресурса отражает предельные издержки на него, цена, максимизирующая прибыль, будет соответствовать точке E_2, Более тонкие подходы используют аппарат теории игр для анализа конкретных отраслевых ситуаций. С нашей точки зрения, общая ситуация противостояния монополии и монопсонии может быть описана сравнительно простой микроэкономической моделью взаимодействия функции предложения монополии и спроса со стороны монопсонии.

где $MR = MC$. В этой точке монополия захочет продать L_U единиц услуг ресурса. Для того чтобы заставить нанимателя ограничить закупку услуг ресурса этим количеством, монопольный продавец захочет установить цену, равную W_U.

На рассматриваемом рынке не существует равновесия, так как $W_U > W_м$ и $L_м > L_U$. Сделка не может состояться, пока не будет достигнуто соглашения о цене. Результат зависит от стратегии на переговорах как у продавцов, так и у покупателей. Вероятно, цена установится на уровне где-то между W_U и $W_м$. Каждая сторона будет пробовать обмануть другую. Одна может попробовать скрыть цену, максимизирующую прибыль. Может последовать угроза прервать переговоры. Но ни у одной стороны нет другой альтернативы, кроме как вести переговоры с другой стороной, так как на рынке находятся только один продавец и один покупатель. Для предсказания конечного равновесия нужно было бы применить подход из теории игр" (см.: *Хайман Д.Н.* Современная микроэкономика: анализ и применение. Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1992, т.2, С. 187-189).

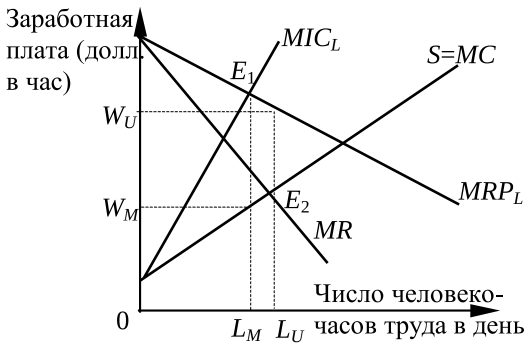


Рисунок 1. Двусторонняя монополия

Выше был разобран механизм формирования цены предложения монополиста как функции объема выпускаемой ею продукции. Проанализируем теперь построение функции спроса монопсонии.

Предполагается, что, как и всякая фирма, монопсонист максимизирует прибыль, то есть решает задачу на максимум функции прибыли, задаваемой как разность между общим доходом (TR) и общими издержками (TC):

$$\pi = TR - TC \to \max.$$

Пусть технология выпуска продукции данной фирмы описывается производственной функцией $Q_2 = f(Q_1)$, где Q_2 – продукт фирмы, а Q_1 – ресурс[10]. Обозначим через P_1 цену ресурса. Заметим, что цена ресурса является функцией объема данного фактора производства, продаваемого его поставщиками потребителю. Она называется функцией предложения ресурса. Тогда $TC = P_1(Q_1)\cdot Q_1$, а $TR = P_2(Q_2)\cdot Q_2$, где P_2 – цена на продукцию монопсонии..

Необходимым условием максимума функции прибыли является равенство нулю первой производной по переменному ресурсу:

$$\frac{d\pi}{dQ_1} = \frac{dTR}{dQ_1} - \frac{dTC}{dQ_1} = \frac{\partial TR}{\partial Q_2}\cdot\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} - \left(p_1\frac{dQ_1}{dQ_1} + Q_1\frac{dp_1}{dQ_1}\right) =$$

$$= \frac{\partial TR}{\partial Q_2}\cdot\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} - p_1\left(1 + \frac{Q_1}{p_1}\frac{dp_1}{dQ_1}\right) = \frac{\partial TR}{\partial Q_2}\cdot\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} - p_1\left(1 + \frac{1}{\dfrac{dQ_1}{dp_1}\dfrac{p_1}{Q_1}}\right) = 0.$$

[10] Для упрощения анализа продукт и ресурс предполагаются единственными.

Введем традиционные обозначения: $MR = \frac{\partial TR}{\partial Q_2}$ – предельный доход, $MP = \frac{\partial Q_2}{\partial Q_1}$ – предельный продукт ресурса, $E^s_{Q_1} = \frac{dp_1}{dQ_1} \cdot \frac{Q_1}{p_1}$ – эластичность функции предложения ресурса. В данных обозначениях имеем:

$$\frac{d\pi}{dQ_1} = MR \cdot MP - p_1\left(1 + \frac{1}{E^s_{Q_1}}\right) = 0, \text{ или}$$

$$MR \cdot MP = p_1\left(1 + \frac{1}{E^s_{Q_1}}\right).$$

Если, следуя традиции, обозначить произведение *MR·MP* через *MRP*[11], а произведение $p_1\left(1 + \frac{1}{E^s_{Q_1}}\right)$ через *MFC*[12], то получим хорошо известное равенство *MRP* = *MFC*.

Распишем теперь производную, обозначенную нами через *MR*:

[11] Аббревиатура от английского термина "marginal revenue product" - предельная доходность, или предельный доход от предельного продукта какого-либо ресурса.

[12] Аббревиатура от английского словосочетания "marginal factor cost" – предельные факториальные издержки.

$$\frac{\partial TR}{\partial Q_2}=\frac{\partial}{\partial Q_2}(p_2 Q_2)=p_2+Q_2\frac{dp_2}{dQ_2}=$$

$$=p_2\left(1+\frac{dp_2}{dQ_2}\cdot\frac{Q_2}{p_2}\right)=p_2\left(1+\frac{1}{\frac{dQ_2}{dp_2}\cdot\frac{p_2}{Q_2}}\right).$$

Заметим, что в знаменателе дроби внутри скобок стоит показатель эластичности спроса на продукцию предприятия – монопсонии по цене. Обозначим его $E_p^{d_2}=\frac{dQ_2}{dp_2}\cdot\frac{p_2}{Q_2}$. Индекс d_2 показывает, что мы рассматриваем эластичность спроса на продукцию монопсонии.

Тогда получаем:

$$p_2\left(1+\frac{1}{E_p^{d_2}}\right)MP=p_1\left(1+\frac{1}{E_{Q_1}^s}\right).$$

Откуда следует:

$$p_1=\frac{p_2\left(1+\frac{1}{E_p^{d_2}}\right)MP}{1+\frac{1}{E_{Q_1}^s}}.$$

Мы получили выражение зависимости цены, по которой фирма-монопсония покупает ресурс, от купленного количества. Это и будет функцией спроса монопсонии на ресурс. Она отличается от функции спроса на ресурс конкурентной фирмы, определяемой как равенство $P_1 = P_2 \cdot MP$ (в наших обозначениях), на корректирующий множитель

$$\frac{1+\dfrac{1}{E_p^{d_2}}}{1+\dfrac{1}{E_{Q_1}^{s}}}.$$

Аналогично рассуждениям, проведенным выше относительно функции предложения монополии, можно показать, что цена спроса монопсонии на переменный ресурс является невозрастающей функцией предельной доходности данного ресурса (*MRP*). Предположим, что существуют две альтернативные функции спроса на продукцию монопсониста $P_2^1(q_2)$ и $P_2^2(q_2)$. В силу зависимости, описываемой производственной функцией $q_2 = f(q_1)$, этим двум функциям спроса будут соответствовать функции совокупной доходности ресурса $TRP_2(q_1)$ и $TRP_1(q_1)$, где $TRP_i(q_1) = P_2^i(q_2)\cdot q_2$. Пусть функции предельной доходности ресурса, соответствующие данным функциям спроса, таковы, что $MRP_2(q_1) > MRP_1(q_1)$ для всех $q_1 > 0$.

Кроме того предположим, что при функции спроса на продукт $P_2^1(\cdot)$ монопсонист выберет объем используемого ресурса в количестве q_1^1 и назначит цену на мясо в размере P_1^1, а при функции спроса $P_2^2(\cdot)$ параметрами, характеризующими рынок ресурса будут соответственно q_1^2 и P_1^2.

Тогда, используя аксиому выявленной максимизации прибыли, можно записать:

$$p_2^1 q_2(q_1^1) - p_1^1 q_1^1 \geq p_2^1 q_2(q_1^2) - p_1^2 q_1^2, \tag{6}$$

так как при функции спроса на продукцию $P_2^1(\cdot)$ фирма-монопсония предпочтет выбрать количество q_1^1, а не другое и, в частности, q_1^2, единиц ресурса и предпочтет назначить на него цену $P_1^{\,1}$, а не любую другую, в частности $P_1^{\,2}$, так как это обеспечит ей большую (точнее – не меньшую) прибыль.

Аналогично при функции спроса на продукцию $P_2^{\,2}(\cdot)$ аксиома выявленной максимизации прибыли даст неравенство:

$$p_2^{\,2}q_2(q_1^{\,2}) - p_1^{\,2}q_1^{\,2} \geq p_2^{\,2}q_2(q_1^{\,1}) - p_1^{\,1}q_1^{\,1}. \tag{7}$$

Сложим правую часть неравенства (7) с правой частью неравенства (6), а левую часть (7) - соответственно с левой частью (6). Тогда получим неравенство:

$$p_2^{\,1}q_2(q_1^{\,1}) + p_2^{\,2}q_2(q_1^{\,2}) \geq p_2^{\,1}q_2(q_1^{\,2}) + p_2^{\,2}q_2(q_1^{\,1}) \tag{8}$$

По определению, $p_2^{\,i}q_2(q_1^{\,j}) = TRP_i(q_1^{\,j})$. Поэтому неравенство (8) можно переписать в следующем виде:

$$TRP_2(q_1^{\,2}) - TRP_1(q_1^{\,2}) - [TRP_2(q_1^{\,1}) - TRP_1(q_1^{\,1})] > 0 \tag{9}$$

Поскольку $MRP = \dfrac{dTRP}{dq_1}$, то неравенство (9) можно переписать в интегральной форме:

$$\int_{q_1^1}^{q_1^2} (MRP_2(q_1) - MRP_1(q_1))dq_1 \geq 0\,. \tag{10}$$

По нашему предложению, $MRP_2(q_1)>MRP_1(q_1)$ для всех $q_1>0$. Поэтому, в силу свойств римановского интеграла, из неравенства (10) следует, что верхний предел интегрирования должен быть не меньше нижнего, то есть $q_1^{\,2} \geq q_1^{\,1}$. Заметим, что функция предложения ресурса $p_1(q_1)$ – возрастающая функция количества данного фактора. Поэтому большей величине MRP будет соответствовать большая (точнее – не меньшая) цена. Другими словами, цена спроса монопсонии – это монотонная (возрастающая) трансформация функции предельной доходности ресурса MRP.

Итак, мы получили выражение для цены продукции монополии:

$$p_1 = \frac{MC}{1 + \dfrac{1}{E_p^{d_1}}}.$$

Индекс d_1 показывает, что мы рассматриваем эластичность спроса на продукт монополии, а не монопсонии, которой соответствует индекс d_2. Кроме того, в нашем распоряжении есть выражение для цены того же товара как ресурса монопсонии:

$$p_1 = \frac{p_2\left(1 + \dfrac{1}{E_p^{d_2}}\right)}{1 + \dfrac{1}{E_{Q_1}^{s}}}.$$

Приравнивая данные выражения для цены рассматриваемого товара, получаем искомое выражение для равновесия на рынке двусторонней монополии:

$$\frac{p_2\left(1 + \dfrac{1}{E_p^{d_2}}\right)}{1 + \dfrac{1}{E_{Q_1}^{s}}} = \frac{MC}{1 + \dfrac{1}{E_p^{d_1}}}.$$

Решая полученное уравнение, можно найти равновесный объем производства объекта сделок на рынке взаимодействия монополии и монопсонии, то есть двусторонней монополии.

Итак, в отличие от традиционной точки зрения, утверждающей локальную неединственность рыночного равновесия в ситуации двусторонней монополии, можно сделать вывод, что равновесие на данном рынке, по крайней мере, локально единственно. Исключением будет являться лишь случай совпадения в окрестности равновесия функций спроса на продукцию монополиста и предложения монопсонии.

Ситуация двусторонней монополии, таким образом, может быть редуцирована к взаимодействию двух моделей – монополии и монопсонии. Если существует равновесие в каждой из этих двух моделей, то будет наблюдаться и равновесие в обобщенной модели двусторонней монополии.

Литература

1. *Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И.* Микроэкономика: В 2-х т. / Общая редакция В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа, 1997, Т.2. – 503 с.
2. *Тироль Ж.* Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности / Пер. с англ. – СПб.: Экономическая школа, 1996. – 745 с.
3. *Хайман Д.Н.* Современная микроэкономика: анализ и применение. В 2-х т. Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1992. Т.2. – 384 с.

Математическое моделирование связи уровня неравенства с темпами роста экономики России

Вишневский Р.В.

Представленная статья посвящена вопросам математического моделирования экономики России. Исследования автора привели к возникновению гипотезы о существовании в российской экономике мультипликатора неравенства: начальное возрастание неравенства приводит к дальнейшему процессу увеличению неравенства, в результате которого неравенство стабилизируется на уровне, превосходящем тот уровень, который складывается после первоначального его увеличения.

Mathematical Modeling of Correlation between Inequality Level and Growth Rates of Russian Economy

Vishnevsky R.V.

The article inquires into the issues of mathematical modeling of Russian economy. The author proves the hypothesis of presence of inequality multiplier in the Russian economy. The hypothesis claims that initial inequality growth leads to further increasing inequality and finally it stays at the level which is higher than initial.

Автору представляется, что **в России наблюдается отрицательная корреляция между уровнем неравенства и объемом ВВП: при увеличении неравенства объем ВВП сокращается**. Эта гипотеза коренным образом противоречит выводам неоклассической экономической теории: неоклассики полагают, что уровень неравенства положительно коррелирует с объемом ВВП. По мнению неоклассиков, низкое налогообложение доходов стимулирует частную инициативу, что положительно сказывается на уровне производства и объеме ВВП. Поэтому после первоначального роста неравенства, происходящего в результате свертывания социальных программ, возникает устойчивая тенденция к росту ВВП которая, в конечном итоге, ведет к улучшению благосостояния всех слоев населения. Таким образом, даже если в ходе либеральных реформ социально-экономическое неравенство уменьшается, это происходит на фоне повышения уровня жизни в том числе и бедных слоев населения.

Подход неоклассиков к проблемам неравенства можно определить как гипотезу о существовании дериватора неравенства: отсутствуют объективные предпосылки дальнейшего его увеличения после первоначального скачка. Скорее наоборот, существует тенденция к уменьшению неравенства по мере того, как бедные слои населения отучаются от социального иждивенчества и увеличивают приложение трудовых усилий. Последнее также способствует росту объема ВВП.

Кардинальное отличие позиции автора от взглядов неоклассиков требует от него веского обоснования своей гипотезы. Эмпирические исследования подтверждают гипотезу о том, что в годы правления последовательно либеральных правительств неравенство имеет тенденцию к усилению: по данным еженедельника The Economist последний год нахождения у власти Дж. Мэйджора ознаменовался самым высоким уровнем неравенства в Великобритании за более чем вековую историю наблюдений. В нашей стране исследования группы Ю. Шевякова показывают, что по степень неравенства в регионах России отрицательно коррелирует со среднедушевыми доходами. В этой статье представлена попытка дать теоретическое обоснование указанному явлению и построить компьютерную имитационную модель, позволяющую исследовать указанные феномены.

Основная гипотеза автора заключается в том, что причиной существования эффекта мультипликации неравенства в нашей стране является двоякая связь бедных слоев населения с производством отечественных товаров.

С одной стороны, отечественные товары характеризуются низкими ценами и качеством по сравнению с зарубежными аналогами, поэтому спрос на отечественные товары предъявляют в основном низкообеспеченные слои населения. Достигнув определенного уровня благосостояния, потребители предпочитают переключаться на потребление импортных товаров. Наименее обеспеченные слои населения расходуют средства в основном на предметы первой необходимости и не могут создать спрос на товары длительного пользования даже отечественного производства. Поэтому, чем ниже уровень неравенства, тем выше спрос на отечественные товары за счет расширения спроса со стороны бедных слоев и переключения части обеспеченных слоев на потребление отечественных товаров.

С другой стороны, бедные слои населения обычно заняты в производстве отечественных товаров, поэтому их доходы напрямую зависят от объема спроса на отечественные товары. Причем, из-за наличия эффекта масштаба, доходы этих слоев растут (и падают) непропорционально быстро при росте (падении) спроса на отечественные товары. Таким образом, мы получаем мультипликационный эффект: при первоначальном снижении неравенства растет спрос на отечественные товары, что приводит к увеличению доходов бедных слоев населения. Увеличение доходов бедных слоев приводит к дальнейшему снижению неравенства и росту спроса на отечественные товары. Аналогично процесс происходит и в обратном направлении. Поскольку при уменьшении неравенства инициируется процесс импортозамещения, приводящий к росту спроса на отечественные товары, среднедушевой ВВП возрастает. При увеличении неравенства наблюдается обратный процесс падения среднедушевого ВВП. Автору представляется, что падение отечественного производства, происходившее на всем протяжении реформ вплоть до августовского кризиса, во многом объясняется именно указанным эффектом. Ниже эта гипотеза будет иллюстрирована на базе имитационного моделирования.

Имитационная модель экономики России

Перейдем к построению компьютерной имитационной модели, иллюстрирующей точку зрения автора. В модели имитируется функционирование экономики, основным экспортным товаром в которой являются энергоносители. Наравне с трудом они также используются для производства отечественной промышленной продукции. Моделируемая экономика полностью удовлетворяет свои потребности в продуктах питания за счет импорта, также импортируются товары потребления, качество которых превосходит качество отечественных. Таким образом, в модели рассматриваются три вида продуктов: продовольствие, промышленная продукция отечественного производства и промышленная продукция импортного производства, причем последние два продукта являются субститутами. Для производства продукции используются два фактора производства: труд и энергоносители. Модель носит краткосрочный характер, поэтому производственные мощности считаются фиксированными, и для производства продукции не используется дополнительный производственный капитал, то есть, отсутствуют производственные инвестиции. Другим допущением является то, что в представленной модели не осуществляются накопления: все доходы, полученные в периоде t, расходуются в периоде t+1. В целом, предпосылки об отсутствии накоплений и инвестиций соответствуют ситуации в российской экономике, характеризующейся крайне низким объемом инвестиций и нормой накоплений.

В модели рассмотрены шесть рынков: рынок труда, энергоносителей, продовольствия, отечественной промышленной продукции, импортной продовольственной продукции и валютный рынок, регулирующий соотношение экспорта и импорта. Опишем их по порядку.

На рынке труда рабочие готовы предложить любое количество труда при фиксированной рублевой ставке заработной платы, равной w. В целом это предположение соответствует ситуации неполной занятости, в которой оказалась экономика России. Соответственно, объем рабочей силы, занятой в производстве, целиком зависит от спроса на рабочую силу, который, в свою очередь, определяется спросом на отечественную продукцию и ценой энергоносителей.

Цена на рынке энергоносителей диктуются мировым рынком. Считается, что моделируемая экономика слишком мала для того, чтобы оказать влияние на мировые цены. Таким образом, цена на энергоносители равна мировой, с учетом курса доллара. Спрос на энергоносители со стороны отечественных производителей удовлетворяется полностью, излишек экспортируется, обеспечивая приток в страну валютной выручки.

Объем производства энергоносителей определяется путем приравнивания предельных затрат отрасли и цены мирового рынка. Весь излишек производителя, получаемый в отрасли, присваивается ее частными владельцами (олигархами). Все издержки расходуются на выплату зарплаты рабочим этой отрасли. Считается, что рынок труда рабочих добывающих отраслей функционирует автономно от рынка труда остальных рабочих. В качестве функции издержек добывающей отрасли, взята функция: $C(x) = c_1x^2$, где c_1 – константа, x – объем производства энергоносителей. Объем производства энергоносителей определяется как решение задачи: $gx - c_1x^2 \rightarrow \max$, где g – мировая цена энергоносителей. Весь излишек производителя, получаемый в отрасли, присваивается олигархами. Все издержки состоят из оплаты рабочим.

Внутренний спрос на энергоносители и спрос на труд определяются исходя из цены отечественных промышленных товаров. Задача, решаемая производителями, имеет вид: $\pi = pf(O^i,L) - wL - g\,O^i \rightarrow \max$, где π – прибыль производителей, p – цена отечественной продукции, O^i – внутренне потребление энергоносителей, $f(O^i,L)$ – производственная функция. В качестве производственной функции из соображений удобства моделирования была выбрана функция вида:

$$f(O^i,L) = A(\alpha \ln(L) + (1-\alpha)\ln(O^i)),$$

где A, α – константы. В модели строятся функции спроса на труд, энергоносители и функция предложения отечественных товаров в зависимости от ставки зарплаты, мировой цены на энергоносители (эти величины задаются экзогенно) и цены на отечественную продукцию. Рыночная цена на отечественную продукцию определяется как результат пересечения кривых спроса и предложения. После определения цены мы можем узнать объем использования труда и объем внутреннего потребления энергоносителей.

Спрос на отечественную продукцию и импорт моделируется следующим образом. Предполагается, что все доходы труда (Y_L), состоящие из доходов работников добывающей и обрабатывающей промышленности, распределяются между работниками по нормальному закону, где среднее равно Y_L/N, и дисперсией $Y_L/4N$, где N – число рабочих. Аналогично, все доходы капитала (Y_K), состоящие из доходов прибыли промышленников и доходов олигархов, распределяются между предпринимателями по нормальному закону со средним Y_K/M и дисперсией $Y_K/5M$, где M – число предпринимателей. Каждый потребитель, доходы которого (y_i) больше цены одной единицы продовольствия (b), покупает одну единицу продовольствия, после чего достигается полное насыщение его потребности в продовольствии. Те, чей доход меньше цены одной единицы продовольствия, используют весь свой доход на покупку продовольствия. Таким образом, спрос на продовольствие представляется в виде:

$$D(b) = \sum_{i:y_i<b} \frac{y_i}{b} + \sum_{i:y_i \le b} 1.$$

Диапазон изменения i определяется числом потребителей $M+N$.

Считается, что при достижении некоторого уровня достатка потребитель целиком переключается с потребления отечественных товаров на потребление импортных. Для упрощения предполагается, что это происходит, когда уровень доходов потребителя превосходит цену импорта P_M. В действительности по одной товарной группе такое переключение происходит у различных потребителей при разном уровне доходов: сказываются индивидуальные различия. Кроме того, переключение в потреблении товаров из разных товарных групп происходит также неравномерно: в одной товарной группе потребитель уже потребляет импортные товары, а в другой – еще отечественные. Однако введенное допущение принципиально не искажает описание процесса принятия решений потребителем, но позволяет существенно облегчить моделирование. Так как потребители полностью используют свои доходы на потребление, спрос на импорт представляется в виде:

$$D(P_M) = \sum_{i:\, y_i - b \geq P_M} \frac{y_i}{P_M}$$

Тогда спрос на отечественную продукцию составит:

$$D(p) = \sum_{i:\, 0 < y_i - b < P_M} \frac{y_i}{p}.$$

Считается, что размеры отечественной экономики малы по сравнению с размерами мирового рынка, поэтому импорт полностью может удовлетворить весь предъявляемый на него спрос и объем спроса на импорт не влияет на мировые цены. То есть, объем импорта равен объему спроса на импортную продукцию. В модели введено предположение (к счастью, не соответствующее реальности), что страна полностью покрывает свои потребности в продовольствии за счет импорта. Аналогично, предполагается, что спрос на продовольствие удовлетворяется полностью, не влияя на мировые цены.

Зная кривую предложения отечественных товаров и кривую спроса на них, мы можем найти равновесную цену. После определения равновесной цены, мы определяем объем спроса на труд, объем внутреннего спроса на энергоносители, объем выпуска отечественной продукции и величину прибыли отечественных производителей. Умножая объем спроса на труд на величину ставки заработной платы, мы получаем доходы рабочих в обрабатывающей промышленности. Объем импорта вычисляется путем сложения объема спроса на импортную промышленную продукцию и объема спроса на продукты питания. Величина импорта получается в результате вычитания из объема производства энергоносителей величины внутреннего потребления. Умножив полученную величину на мировую цену энергоносителей, мы получим объем валютной выручки, получаемой страной.

Нам осталось описать функционирование валютного рынка. Поскольку в модели не рассматриваются процессы перелива капитала, предполагается, что экспорт и импорт выравниваются через механизм валютного курса. При превышении импорта над экспортом курс доллара, выраженный в единицах национальной валюты растет, если соотношение обратное, он падает. Такое поведение валютного курса способствует выравниванию экспорта и импорта. В модели реакция курса доллара определяется формулой: $c_{t+1} = c_t (1+k\, M_t/X_t)$, где c_{t+1} и c_t – курс доллара в моменты времени t и $t+1$ соответственно, k – коэффициент реагирования, – величины импорта и экспорта в момент времени t. Такое моделирование поведения валютного курса приводит к наличию меркантилистских эффектов: если в начале экспорт превышал импорт, это способствует увеличению реальной денежной массы в стране. После установления равновесия реальная денежная масса не сокращается. С другой стороны, если изначально импорт превосходил экспорт, реальная денежная масса сокращается и затем уже не восстанавливается. Поэтому равновесный уровень дохода зависит от начального значения валютного курса, однако, это не существенно искажает качественные эффекты.

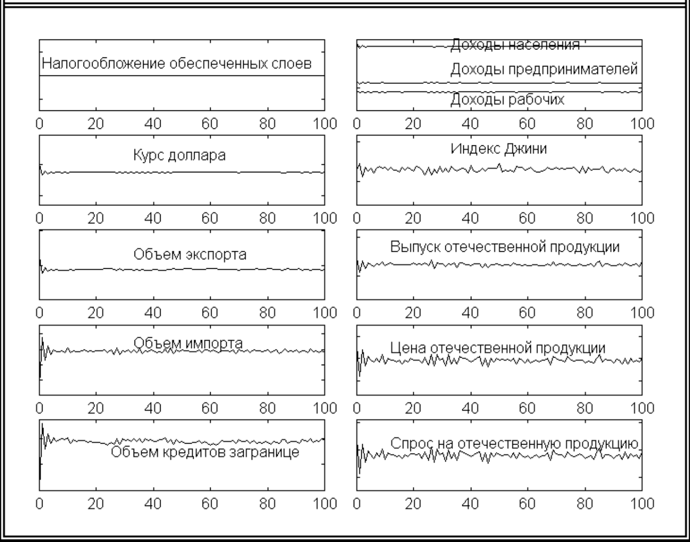
На очередном шаге моделирования доходы, полученные рабочими и предпринимателями на предыдущем шаге, формируют спрос на продукцию. На основе выравнивания спроса и предложения рассчитываются экономические показатели за этот период: объем выпуска энергоносителей, объем экспорта, объем выпуска отечественной продукции, ее цена, объем импорта и доходы рабочих и предпринимателей. На следующем шаге доходы потребители тратят доходы, полученные на этом шаге и т. д.

Следует отметить одну особенность модели: конкретные значения экономических показателей зависят от калибровочных коэффициентов. Автор не занимался подбором этих коэффициентов таким образом, чтобы модель количественно соответствовала российской экономике. Целью автора было доказать принципиальную возможность существования эффекта мультипликации неравенства в экономике, подчиняющейся неоклассическим предпосылкам (гибкие цены, бесконечная делимость товаров, оптимальное использование ресурсов), что ему удалось сделать. Да и вряд ли вообще возможно добиться точного соответствия, поскольку модель отражает основные закономерности экономики России в сильно упрощенном виде. Кроме того, описание функционирования валютного рынка, принятое в модели, приводит к тому, что равновесное положение устанавливается очень быстро. В реальной экономике процесс установления равновесия может идти существенно медленнее. Поэтому интерес представляют не количественные значения параметров, а направление их изменения при различных видах внешнего воздействия. Таким образом, мы в первую очередь интересуемся качественным, а не количественным соответствием поведения модели и российской действительности.

Исследование модели

На рис. 1 изображено функционирование модели в обычном режиме. На графиках представлены объем производства отечественной продукции, величина рынка отечественной продукции в рублях, доходы рабочих и предпринимателей, курс доллара и накопленный внешний долг. Необходимо отменить, что, модель является не стохастической, а детерминированной, наблюдаемые незначительные колебания величин объясняются погрешностями вычислений.

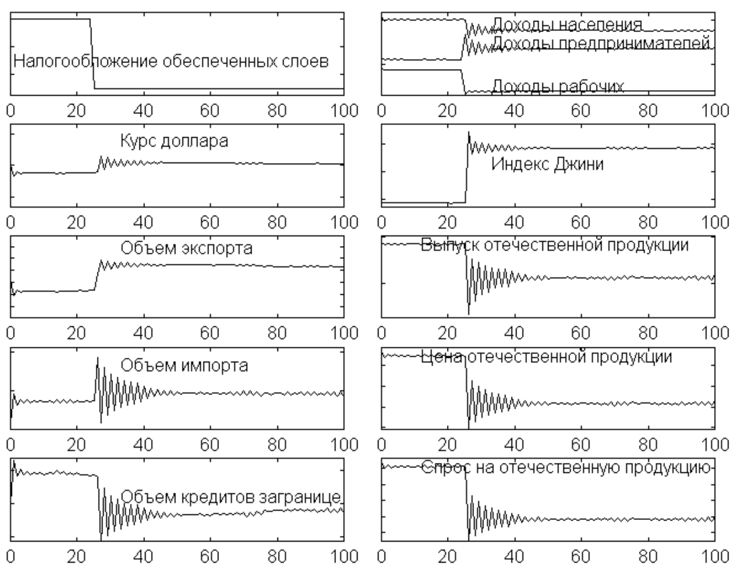
Рисунок 1. Функционирование модели в нормальном режиме



На рис. 2 смоделированы последствия либеральных реформ в России. Суть этих реформ сводилась к первоначальному перераспределению доходов от бедных к богатым. Например, в ходе галопирующей инфляции 92-93 гг.

полностью обесценились сбережения населения, но благодаря этой инфляции возникла сеть коммерческих банков. Таким образом, имело место чистое перераспределение доходов от труда к капиталу. Эти реформы можно смоделировать путем введения налога на доходы бедных и передачи полученных средств богатым.

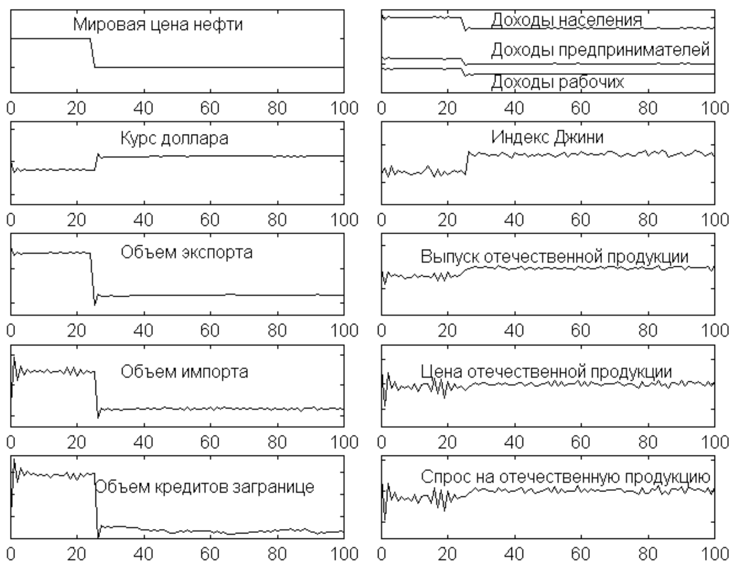
Рисунок 2. Последствия либеральных реформ



Мы видим, что в результате реформ доходы предпринимателей растут, доходы наемных работников падают, но суммарные доходы падают, внешний долг страны растет, за счет сокращения внутреннего производства растут импорт и экспорт. Также следует отметить, что вообще модель характеризуется очень быстрым установлением равновесных значений, однако в данном случае имеет место длительный переходный процесс, характеризующийся высокой нестабильностью. В этом аспекте результаты моделирования совпадают с тем, что в первые годы реформ эмпирически наблюдался длительный период социально-экономической нестабильности. Аналогично, все можно отметить, что результаты моделирования качественно полностью соответствуют процессам, происходившим в экономике в годы реформ. Единственным отличием является то, что в модели цена отечественной продукции падает, а в реальности наблюдалась галопирующая инфляция. Это несовпадение объясняется тем, что в модель не включена кредитно-денежная политика государства и накопление населением денег в наличной валюте.

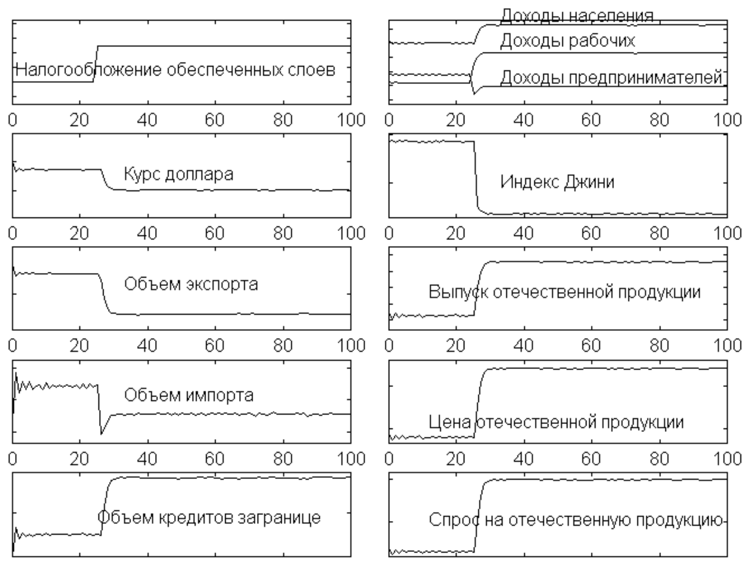
Кризис 17 августа продемонстрирован на рис. 3. Падение мировой цены на нефть приводит к падению экспорта и импорта, уменьшению доходов предпринимателей и наемных работников, росту курса доллара, росту внешнего долга, однако, при этом наблюдается рост производства отечественной продукции. Рост производства отечественной продукции достигается за счет процессов импортозамещения. Полученная картина практически полностью соответствует картине кризиса 17 августа. Две приведенные иллюстрации говорят о том, что построенная модель достаточно адекватно описывает поведение российской экономики и может быть использована для прогнозирования результатов проведения той или иной экономической политики.

Рисунок 3. Последствия кризиса 17 августа



В начале статьи автор высказал гипотезу о существовании в российской экономике мультипликатора неравенства. Сейчас пришло время подтвердить гипотезу на основе созданной модели. Для этого введем предположение, что в определенный момент правительство вводит налогообложение доходов предпринимателей и перераспределяет полученные средства наемным работникам. Как видно на рис. 4, в этом случае экспорт, импорт и курс доллара падают, отечественное производство растет, уменьшается внешняя задолженность. Особо следует подчеркнуть изменение доходов труда и капитала. Доходы предпринимателей сначала падают, а затем растут, но их окончательное значение меньше начального. В первый момент доходы наемных работников растут на величину, равную падению доходов предпринимателей, однако затем разворачивается процесс импортозамещения, который приводит к дальнейшему росту доходов наемных работников. Так в модели проявляется действие эффекта мультипликатора неравенства: после изначального импульса к сокращению неравенства, оно продолжает сокращаться. При этом после перераспределения доходов совокупные доходы членов общества растут. Автору представляется, что подобного изменения налогообложения можно добиться либо путем развития системы взимания подоходного налога, либо путем установления высоких акцизов на предметы роскоши. В любом случае полученные средства должны направляться на социальные нужды.

Рисунок 4. Модель проведения социал-демократической политики



Выводы

В статье построена динамическая имитационная модель российской экономики, описывающая многие характерные черты последней. Проведено моделирование либеральных реформ и кризиса 17 августа и показано, что выводы модели находятся в хорошем согласии с реальностью. Затем было проведено моделирование гипотетического изменения системы налогообложения в пользу бедных слоев и показано, что в этом случае в экономике будет наблюдаться существен-ный экономический рост. Моделирование подтвердило гипотезу автора о существовании в экономике эффекта мультипликации неравенства: после первоначального снижения неравенства, вызванного внешним импульсом, оно продолжает снижаться автоматически. Полученные результаты свидетельствуют в пользу проведения политики снижения неравенства, что может дать существенный эффект в коротком периоде. Однако в долгом периоде этот эффект будет закреплен только в том случае, если будет проведена крупная реформа прав собственности, направленная на создание эффективного производителя. По мнению автора, реформа прав собственности должна быть направлена на создание мощных и экономически эффективных финансово-промышленных групп, но это – тема отдельного исследования.

Представленная работа является первым шагом автора в проблеме исследования неравенства в России. В дальнейшем автор надеется подтвердить свою гипотезу о существовании мультипликатора неравенства на основе статистических расчетов. Автор готов к обсуждению гипотез, высказанных в данной статье. Вы можете высказать свое мнение, написав автору письмо на e-mail vishnevsky@mtu-net.ru или выступив на форуме, расположенном по адресу www.chat.ru/~rvish. Там же вы можете получить электронную версию этой статьи и другие интересующие вас материалы.

Системно-динамическое моделирование экономического роста

Сидоренко В.Н.

Рассматривается ряд стандартных макроэкономических моделей экономического роста (модель Солоу-Свена и ее модификации, модель Рамсея и ее модификации) с помощью инструментария системной динамики.

System Dynamic Modeling of Economic Growth

Sidorenko V.N.

The some of standard macroeconomic models of economic growth (Solow-Swan model and its modifications, Ramsey model of endogenous growth and its modifications) by means of system dynamics approach.

Модели экзогенных сбережений

Наиболее известной макроэкономической моделью экономического роста является Модель Солоу-Свена [1,2,3], предложенная Р. Солоу и Т. Свеном в 1956 г. частным случаем которой является модель Харрода-Домара (1939, 1946). Модель Солоу-Свена послужила основой для разработки более изощренных моделей, таких как модели, учитывающие человеческий капитал и НИОКР (Маквин, Ромер, Вейль (1992), Лукас (1988), Кремер (1993), Гроссман и Хелпман (1991) и др.) [1].

В качестве запасов в модели Солоу-Свена рассматриваются следующие переменные, зависящие от времени в момент времени t: $K(t)$ – капитал, $L(t)$ – труд, $E(t)$ – уровень технологического развития (эффективность труда), а в качестве потоков – переменные $GL(t)$ – прирост населения, $I(t)$ – инвестиции, $DK(t)$ – амортизация капитала, $Y(t)$ – выпуск продукции (ВВП), $C(t)$ – потребление, $GE(t)$ – темп технологического развития (повышения эффективности труда). Экзогенными факторами являются n – темп прироста трудовых ресурсов (численность рабочих), n – норма сбережения, d – норма амортизации, g – темп прироста технологий (эффективности труда).

На диаграммном языке системной динамики модель записывается Солоу-Свена следующим образом (рис. 1):

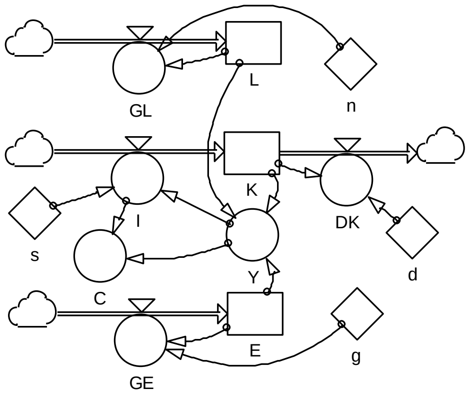


Рисунок 1. Структураня схема (потоковая диаграмма) модели Солоу-Свена

Данной потоковой диаграмме соответствует следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{L}(t) = GL(t) \\ GL(t) = nL(t) \\ L(t_0) = L_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{K}(t) = I(t) - DK(t) \\ I(t) = sY(t) \\ DK(t) = dK(t) \\ K(t_0) = K_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{E}(t) = GE(t) \\ GE(t) = gE(t) \\ E(t_0) = E_0 \end{cases}$$

где $Y(t) = F(K, LE)$ – в общем случае нелинейная функция своих аргументов, а $C(t) = Y(t) - I(t)$. Решением данной системы при $Y(t) = AK^{\alpha}(t)(L(t)E(t))^{1-\alpha}$ в случае $0 < d, n, g, \alpha < 1$ являются следующие функции, получаемые стандартными методами и представляющие собой фазовый вектор состояния:

$$L(t) = L_0 e^{nt},\ E(t) = E_0 e^{gt},$$

$$K(t) = L_0 E_0 e^{(n+g)t} \left[\frac{sA}{d+n+g} + \left[\left(\frac{K_0}{L_0 E_0} \right)^{1-\alpha} - \frac{sA}{d+n+g} \right] e^{-(1-\alpha)(d+n+g)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

В случае дискретной модели Солоу-Свена получим следующую систему уравнений (дискретных отображений):

$$\begin{cases} L_{t+1} = L_t + GL_t \\ GL_t = nL_t \\ L_{t=0} = L_0 \end{cases} \quad \begin{cases} K_{t+1} = K_t + I_t - DK_t \\ I_t = sY_t \\ DK_t = dK_t \\ K_{t=0} = K_0 \end{cases} \quad \begin{cases} E_{t+1} = E_t + GE_t \\ GE_t = gE_t \\ E_{t=0} = E_0 \end{cases}$$

где $Y_t = F(K_t, L_t E_t)$ – в общем случае нелинейная функция своих аргументов, а $C_t = Y_t - I_t$. Решением данной системы при $Y_t = AK_t^{\alpha}(L_t E_t)^{1-\alpha}$ в случае $0 < d, n, g, \alpha < 1$ являются следующие функции, представляющие собой фазовый вектор состояния:

$$L_t = L_0 (1+n)^t,\ E_t = E_0 (1+g)^t,$$

$$K_t = L_0 E_0 (1+n+g)^t \left[\frac{sA}{d+n+g} + \left[\left(\frac{K_0}{L_0 E_0} \right)^{1-\alpha} - \frac{sA}{d+n+g} \right] (1-(1-\alpha)(d+n+g))^t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Данный класс моделей представляет собой модели детерминированных систем, динамика которых не зависит от управления (возмущения), то есть систем, находящихся в состоянии естественной свободы и совершающих свободное движение.

Модели эндогенных сбережений

К таким моделям относят модели макроэкономического роста являются различные оптимизационные модели, в которых решатеся задача оптимального управления. Примером управляемого движения, для которого решается задача Лагранжа, являются модели Рамсея (1928) и ее модификации (модели Шелла (1862), Касса (1965), Купманса (1965) и др.) , в том числе и такие модели, котрые учитывают человеческий капитал и НИОКР (Ромер (1986) и др.) [1]. В общем виде все вышеупомянутые модели записываются в следующем виде (рис. 2):

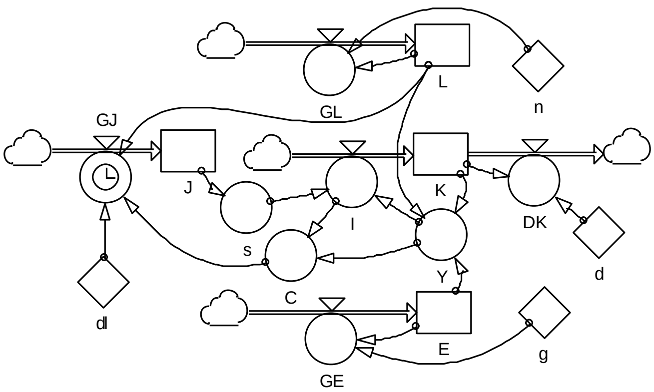


Рисунок 1. Структураня схема (потогковая диаграмма) модели Рамсея и др.

$$\begin{cases} \dot{L}(t) = GL(t) \\ GL(t) = nL(t) \\ L(t_0) = L_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{K}(t) = I(t) - DK(t) \\ I(t) = s(t)Y(t) \\ DK(t) = dK(t) \\ K(t_0) = K_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{E}(t) = EG(t) \\ GE(t) = gE(t) \\ E(t_0) = E_0 \end{cases}$$

где $Y(t) = F(K(t), L(t)E(t))$ – в общем случае нелинейная функция своих аргументов, а $C(t) = Y(t) - I(t)$. При этом требуется максимизировать значение следующего целевого функционала:

$$J = \int_{t_0}^{T} GJ(C(t), L(t), \delta)dt \to \max_{s \in U},\ GJ(C(t), L(t), \delta) = U(C(t), L(t))e^{-\delta \cdot t}$$

где $U(C(t), L(t))$ – в общем случае нелинейная по своим аргументам функция полезности, δ – дисконтный множитель, а $s(t)$ – программное управление. В дискретном случае целевой функционал запишется следующим образом:

$$J = \sum_{t=0}^{T-1} GJ(C_t, L_t, \delta) \to \max_{s \in U},\ GJ(C_t, L_t, \delta) = \frac{U(C_t, L_t)}{(1+\delta)^t}.$$

При этом функция полезности в вышеупомянутых моделях выглядит следующим образом:

а) ***модель Рамсея***

$$U(C(t), L(t)) = U\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right),$$

б) ***модель Шелла***

$$U(C(t), L(t)) = \frac{C(t)}{L(t)},$$

в) ***модель Касса***

$$U(C(t), L(t)) = u(C(t))\frac{L(t)}{H},$$

где u – полезность в расчете на одного члена домашнего хозяйства, H – число домашних хояйств.

В общем случае оптимальное программное управление находится из решения задачи О. Больца минимизации по u некоторого целевого функционала:

$$J = \int_{t_0}^{T} g(t, x(t), u(t))dt + \varphi(T, x(T)) \to \min_{u \in U}$$

в непрерывном случае и

$$J = \sum_{t=0}^{T-1} g(t, x_t, u_t) + \varphi(x_T) \to \min_{u \in U}$$

в дискретном, где g, φ – заданные скалярные функции. Если $g \equiv 0$, то говорят о задаче А. Майера, если $\varphi \equiv 0$, то говорят о задаче Лагранжа, которая в основном и встречается в теории экономического роста. В случае максимизации целевого функционала нужно его взять с обратным знаком и решить задачу минимизации.

Кроме того, если на систему воздействуют разнонаправленные управления, возникающие в теории дифференциальных игр, то в этом случае функционал качества максимизируется по одному управлению и минимизируется по другому:

$$J = \int_{t_0}^{T} g(t, x(t), u(t), v(t))dt + \varphi(T, x(T)) \to \min_{v \in V} \max_{u \in U}$$

или

$$J = \sum_{t=0}^{T-1} g(t, x_t, u_t, v_t) + \varphi(x_T) \to \min_{v \in V} \max_{u \in U}.$$

Получаемые при этом траектория движения $x^*(t), x_t^*$ и управления $u^*(t), u_t^*$ ($v^*(t), v_t^*$) называются соответственно ***оптимальной траекторией*** и ***оптимальным(и) управлением(ями)***, а момент времени t^*, в который достигается максимальное значение целевого функционала, называется ***оптимальным моментом окончания процесса***.

Для решения задач оптимального управления используются принцип максимума Понтрягина (необходимое условие) и метод динамического программирования, основанный на построении и использовании функции Беллмана (достаточное условие). Принцип максимума соответствует принципу Вейерштрасса и методу канонических уравнений Гамильтона в классической вариационной задаче, в то время как метод динамического программирования является аналогом метода Гамильтона-Якоби.

Решение задачи проводится на основе принципа максимума Понтрягина [4], представляющим необходимое условие экстремума целевого функционала.

Непрерывный случай. Функция Гамильтона-Понтрягина (гамильтониан) записывается в следующем виде:

$$H\left(k,\bar{\psi},s,t\right)=\psi_0 U(s,k(t))\,e^{-\delta t}+\psi\,\dot{k}(t)\ ,$$

где $\overline{\psi}(t)=(\psi_0,\psi(t))$ – сопряжённая переменная, представляющая собой отличную от нуля непрерывную вектор-функцию, $\psi_0\equiv const\geq 0$, k – капиталовооруженность одного работника, равная $k=K(t)/(L(t)E(t))$, а вместо $\dot{k}(t)$ подставляется правая часть уравнения, полученного путем применения вышеуказанной замены переменных из системы дифференциальных уравнений, соответствующей потоковой диаграмме на рис. 2.

Случай $\psi_0\equiv 0$ возможен лишь при $s^*\equiv 0$ (все потребляется) или $s^*\equiv 1$ (все сберегается), где s^* – оптимальное программное управление. Данный случай нереалистичен, поэтому обычно рассматривается случай $\psi_0\equiv const>0$ (например $\psi_0\equiv 1$), приводящий к следующему гамильтониану:

$$H\left(k,\vec{\psi},s,t\right)=U(s,k(t))\,e^{-\delta t}+\psi\,\dot{k}(t)\ .$$

Вводя новую сопряженную переменную $q(t)=\psi(t)e^{\delta t}$, получаем гамильтониан в более удобной для анализа форме:

$$H\left(k,\vec{\psi},s,t\right)=[U(s,k(t))+q\,\dot{k}(t)]e^{-\delta t}\,.$$

В квадратных скобках оказывается суммарная дисконтированная полезность, равная сумме полезности обычной полезности U и чистых инвестиций в расчете на одного работника $(I(t)-DK(t))/(L(t)E(t))$, умноженных на q.

Если $s^*(t)$ – оптимальное управление, приводящее к максимизации целевого функционала, а $k^*(t)$ – соответствующая оптимальная траектория, то, согласно принципу максимума Понтрягина, существует такая непрерывная функция $\psi(t)$, что

$$H\left(k^*(t),\psi(t),s^*(t),t\right)=\max_{s\in[0,1]}H\left(k^*(t),\psi(t),s,t\right),$$

то есть максимизируется суммарная дисконтированная полезность и

$$\frac{\partial H}{\partial s}=0\,,\quad \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}<0\,,$$

а функции $\psi(t)$ и $k^*(t)$ удовлетворяют следующей системе канонических уравнений:

$$\dot{\psi}(t)=-\frac{\partial H}{\partial k}\,,\qquad \dot{k}^*(t)=\frac{\partial H}{\partial \psi}\,,\qquad k^*(t_0)=k_0$$

из решения которой определяются оптимальные $k^*(t)$ и $s^*(t)=s^*(k^*(t),\psi(t),t)$.

Кроме того, в задаче Лагранжа выполняется следующее условие трансверсальности, представляющее собой дополнительное ограничение:

$$-H(t_1^*)\delta t_1 + \psi(t_1^*)\delta k = 0,$$

где в случае фиксированных значений T и k получаем $\delta t_1 = 0$ и $\delta k = 0$. В случае задачи Майера условие транверсальности модифицируется следующим образом:

$$\delta\varphi(t_1^*) - H(t_1^*)\delta t_1 + \psi(t_1^*)\delta k = 0,$$

где вариация

$$\delta\varphi(t_1^*) = \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}\delta t_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial k}\delta k,$$

а H выражен через переменную ψ, найденную из решения системы канонических уравнений. При произвольных T и k условие трансверсальности становится более сложным, вариации δt_1 и δk становятся произвольными, хотя и удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$\Gamma(t_1^*, k^*(t_1^*)) = 0, \qquad \delta\Gamma(t_1^*, k^*(t_1^*)) = 0$$

на некоторой поверхности

$$\Gamma = \Gamma\{(t_1, k) \mid \Gamma_i(t_1, k(t_1)) = 0, \quad i = 1,...,l, \quad t_1 \in (t_0, \infty)\},$$

где Γ_i – непрерывно дифференцируемы, а l в нашем случае удовлетворяет неравенству $0 \le l \le 2$. Если $l = 0$, то не фиксированы ни значение t_1, ни значение $k(t_1)$ и $\delta t_1 \ne 0$, $\delta k \ne 0$. В случае $l = 1$ может быть известен момент окончания процесса t_1, но не задано значение $k(t_1)$, то есть имеем варианты: $\Gamma_1(t_1, k(t_1)) = t_1 - T$ и $\delta t_1 = 0$, $\delta k \ne 0$ или $\Gamma_1(t_1, k(t_1)) = t_1 - k(t_1) - T$ и $\delta t_1 = \delta k$. В случае $l = 2$ известен и момент окончания процесса t_1 и задано значение $k(t_1)$, то есть имеем $\Gamma_1(t_1, k(t_1)) = t_1 - T$, $\Gamma_2(t_1, k(t_1)) = k - k(t_1)$ или их комбинацию и $\delta t_1 = 0$, $\delta k = 0$.

Таким образом, решение канонической системы совместно с ограничениями, получаемыми из условия транверсальности, позволяют определить оптимальные $s^*(t)$ и $k^*(t)$ и другие переменные как функции от времени *t*.

Дискретный случай. Функция Гамильтона-Понтрягина (гамильтониан) записывается в следующем виде:

$$H(k, \bar{\psi}, s, t) = \psi_0 \frac{U(s, k_t)}{(1+\delta)^t} + \psi k_{t+1} ,$$

где далее по тексту $t = 0, ..., T-1$ (T задано), $\psi_t = (\psi_0, \psi_t)$ – сопряжённая переменная, представляющая собой отличную от нуля вектор-функцию, $\psi_0 \equiv const \geq 0$, k – капиталовооруженность одного работника, равная $k = K_t / (L_t E_t)$, а вместо k_{t+1} подставляется правая часть уравнения, полученного путем применения вышеуказанной земены переменных из системы дискретных отображений, соответствующей потоковой диаграмме на рис.2.

Случай $\psi_0 \equiv 0$ возможен лишь при $s^* \equiv 0$ (все потребляется) или $s^* \equiv 1$ (все сберегается), где s^* – оптимальное программное управление. Данный случай нереалистичен, поэтому обычно рассматривается случай $\psi_0 \equiv const > 0$ (например $\psi_0 \equiv 1$), приводящий к следующему гамильтониану:

$$H(k, \bar{\psi}, s, t) = \frac{U(s, k(t))}{(1+\delta)^t} + \psi k_{t+1} .$$

Вводя новую сопряженную переменную $q_t = \psi_t (1+\delta)^t$, получаем гамильтониан в более удобной для анализа форме:

$$H(k, \bar{\psi}, s, t) = [U(s, k_t) + q k_{t+1}] \frac{1}{(1+\delta)^t} .$$

В квадратных скобках оказывается суммарная дисконтированная полезность, равная сумме полезности обычной полезности U и чистых инвестиций в расчете на одного работника $(I_t - DK_t)/(L_t E_t)$, умноженных на q.

Если s_t^* – оптимальное управление, приводящее к максимизации целевого функционала, а k_t^* – соответствующая оптимальная траектория, то, согласно принципу максимума Понтрягина, существует такая функция ψ_t, что при каждом $t = 0,...,T-1$

$$H\left(k_t^*, \psi_{t+1}, s_t^*, t\right) = \max_{s \in [0,1]} H\left(k_t^*, \psi_{t+1}, s_t, t\right),$$

то есть максимизируется суммарная дисконтированная полезность и

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} < 0,$$

а функции ψ_t и k_t^* удовлетворяют следующей системе канонических уранений:

$$\psi_t = -\frac{\partial H}{\partial k}, \qquad k_{t+1} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \qquad k_{t=0}^* = k_0, \qquad \Gamma(k_T^*) = 0,$$

где непрерывно дифференцируемая функция $\Gamma(k)$ в общем случае определяет некоторую поверхность. Из решения данной системы уравнений определяются оптимальные k_t^* и $s_t^* = s^*(k_t^*, \psi_{t+1}, t)$. При этом предполагается, что множество, к которому принадлежит s_t, выпукло, а H является вогнутой функцией от s_t.

Кроме того, в задаче Лагранжа выполняется следующее условие трансверсальности, представляющее собой дополнительное ограничение:

$$\psi_T = 0.$$

В случае задачи Майера условие транверсальности модифицируется следующим образом:

$$\delta\varphi_T + \psi_T \delta k_T = 0,$$

где вариация

$$\delta\varphi_T = \frac{\partial\varphi}{\partial k}\delta k_T,$$

или в силу произвольности δk_T получаем

$$\psi_T = -\frac{\partial\varphi_T}{\partial k}.$$

При этом вариация δk_T удовлетворяет соотношениям:

$$\Gamma(k_T^*) = 0, \qquad \delta\Gamma(k_T^*) = 0$$

на некоторой поверхности

$$\Gamma = \Gamma\{k_T \mid \Gamma_i(k_T) = 0, \quad i = 1,...,l\},$$

где Γ_i – непрерывно дифференцируемы, а l в нашем случае удовлетворяет неравенству $0 \le l \le 1$. При $l = 0$ не фиксировано значение k_T и $\delta k \ne 0$. В случае $l = 1$ задано значение k_T, $\Gamma_1(k_T) = k - k_T$ и $\delta k = 0$. Если значение T не задано, условие трансверсальности и получаемые случаи аналогичны непрерывному варианту (см. выше).

Таким образом, решение канонической системы совместно с ограничениями, получаемыми из условия транверсальности, позволяют определить оптимальные s_t^* и k_t^* и другие переменные как функции от времени *t*.

Следует отметить, что дискретный принцип максимума применим для систем с выпуклой вектограммой, то есть поверхностью, образованной значениями правой части уравнения для k_{t+1} (см. выше) при фиксированных значениях t

и k_t и всевозможных значениях s_t. В общем случае дискретных систем условие максимума гамильтониана H по управлению s заменяется условием:

$$\frac{\partial H}{\partial s}(s - s_t^*) \le 0$$

для всех $s \in [0,1]$, то есть H достигает в точке s_t^* либо максимального значения на множестве $s \in [0,1]$, либо s_t^* является стациональной точкой (локальным минимумом или максимумом, седловой точкой) [5].

Литература

1. *Romer D.* Advanced Macroeconomics. – The McGrow-Hill Companies, 1996.
2. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 1975.
3. *Шагас Н.Л., Туманова Е.А.* Макроэкономика – 2. Долгосрочный аспект. – М.: ТЕИС, 1999.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.
5. *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С., Летова Т.А.* Оптимальное управление в примерах и задачах. – М.: МАИ, 1996.

Оптимальное управление инвестициями

Антипов Д.В.

Рассматривается неоклассическая модель экономического развития в случае конечного промежутка времени, в которой целевой функционал представляет собой интегральную сумму дисконтированных значений функции полезности от потребления на одного рабочего.

В работе выписано аналитическое решение на основании принципа максимума Понтрягина. Разработан программный комплекс, который после спецификации пользователем производственной функции, функции полезности, темпов амортизации и прироста рабочей силы, коэффициента дисконтирования, периода планирования и других параметров задачи строит картину синтеза экстремальных управлений, среди экстремальных управлений отыскивает оптимальное. Выдаётся зависимость функции накопления от времени на оптимальной траектории. Все результаты отображаются в графической и табличной форме.

Optimal Development of the Economy

Antipov D.V.

The neo-classical economic growth is under consideration. The problem is to select the investment policy providing required capital ratio and maximum to the amount of the discounted values of the utility function of consumption per worker over a finite horizon.

Using Pontrjagin principle of maximum analytical solution has been found. There was developed a software product that after specifying production function, utility function, speed of capital depreciation, rate of labour force growth, discounting factor, planning horizon, starting and required capital ratio, depicts the synthesis picture of extreme controllings and finds the optimal among them. Savings function on optimal trajectory is displayed. All results are shown in table and graphical forms.

Постановка задачи

Рассмотрим на промежутке времени $[0,T]$ (T – горизонт планирования) экономику с линейно-однородной производственной функцией $Y(t) = F(K(t), L(t))$ (далее сокращенно

$Y = F(K, L)$, где $Y(t)$ – выпуск продукции, $K(t)$ – капитал, $L(t)$ – труд в момент времени t. Требование линейной однородности предполагает выполнение соотношения

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \text{для } \lambda > 0.$$

В каждый момент времени выпуск Y делится на потребление C и инвестиции (капиталовложения) I:

$$Y(t) = C(t) + I(t) = (1 - s(t))\,Y(t) + s(t)\,Y(t), \qquad (1)$$

$0 \le s(t) \le 1$, $s(t)$ – *норма сбережения – управляющий параметр*, $\exists\, t_1, t_2: \quad s(t_1) \ne 0,\ s(t_2) \ne 1$.

Производственные фонды амортизируют с темпом $\mu > 0$. Это означает, что за единицу времени из строя выбывает μ-я часть имеющихся основных фондов. Таким образом, выполняется уравнение

$$\dot{K}(t) = s(t) F\big(K(t), L(t)\big) - \mu K(t). \qquad (2)$$

Здесь неявно предполагается, что основные фонды однородны в течение всего рассматриваемого промежутка времени и технологических изменений производственной функции не происходит.

Объём трудовых ресурсов (численность рабочих) растёт с темпом n

$$\dot{L}(t) = n L(t). \qquad (3)$$

Пусть в нашем распоряжении имеется функция полезности, определяющая полезность U в любой момент как функцию от $\tilde{c}$ – потребления на одного рабочего

$$U = U(\tilde{c}(t)) = U\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right) = U\left(\frac{(1 - s(t))\,F\big(K(t), L(t)\big)}{L(t)}\right). \qquad (4)$$

Будем считать, что функция полезности дважды непрерывно дифференцируема на $\left(0,+\infty\right)$ и что предельная полезность – положительная, но убывающая функция, определённая при всех положительных значениях потребления на одного рабочего (закон убывающей предельной полезности):

$$\frac{dU(\tilde{c})}{d\tilde{c}} = \dot{U}(\tilde{c}) > 0,\ \frac{d^2U(\tilde{c})}{d\tilde{c}^2} = \ddot{U}(\tilde{c}) < 0 \tag{5}$$

для всех $\tilde{c}$, $0 < \tilde{c} < +\infty$

Таким образом, функция полезности U – это строго вогнутая и монотонно возрастающая функция. Предположим также, что функция полезности удовлетворяет следующим предельным условиям:

$$\lim_{\tilde{c}\to 0}\dot{U}(\tilde{c}) = +\infty,\ \lim_{\tilde{c}\to +\infty}\dot{U}(\tilde{c}) = 0 \tag{6}$$

Функция полезности определяет полезность в некоторый момент времени, задача же состоит в выборе траектории нормы сбережения на всём отрезке $[0,T]$. Поэтому условимся, что полезности в различные моменты времени не зависят друг от друга, а после соответствующего дисконтирования (для учёта того факта, что ближайшее потребление предпочтительнее отдалённого) их можно складывать. В качестве дисконтирующего множителя положим $e^{-\delta t}$.

В качестве критерия, подлежащего максимизации в плановом периоде, примем интегральную сумму дисконтированных значений функции полезности за все моменты времени:

$$J\left(s(t)\right)=\int\limits_{o}^{T}U\left(\tilde{c}(t)\right)e^{-\delta t}\,dt= \\ =\int\limits_{o}^{T}U\left[\frac{\left(1-s(t)\right)F\left(K(t),L(t)\right)}{L}\right]e^{-\delta t}\,dt\rightarrow\max \tag{7}$$

В научной литературе планирование с конечным горизонтом времени представлено задачами с интегралом качества[1]

$$J\left(s(t)\right)=\int\limits_{o}^{T}\tilde{c}(t)e^{-\delta t}\,dt\rightarrow\max$$

Интегральная сумма дисконтированных значений функции полезности рассматривается лишь для бесконечного горизонта планирования[2]:

$$J\left(s(t)\right)=\int\limits_{o}^{+\infty}U\left(\tilde{c}(t)\right)e^{-\delta t}\,dt\rightarrow\max$$

Критерий качества (7), по мнению автора, в литературе не представлен. Одна из целей данной работы – восполнить образовавшийся пробел.

Обозначим:

капиталовооружённость (фондовооружённость) $k=\dfrac{K}{L}$,

выпуск на одного рабочего $y=\dfrac{F(K,L)}{L}=F\left(\dfrac{K}{L},1\right)=F(k,1)=f(k)$.

---

[1] *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.

[2] *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.

Потребуем, чтобы производственная функция в терминах капиталовооружённости $f(k)$ удовлетворяла неоклассическим условиям:

$$\begin{gathered} f(k) \in C^2(0, +\infty), \qquad \forall k > 0 \;\; f' > 0, f'' < 0 \\ f(0) = 0, \;\; \lim_{k \to +\infty} f(k) = +\infty, \lim_{k \to 0} f'(k) = +\infty, \lim_{k \to +\infty} f'(k) = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

В новых переменных уравнение (2) примет вид

$$\begin{gathered} \dot{k} = \left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{(sF - \mu K)L - KnL}{L^2} = \\ = sf(k) - (\mu + n)k \end{gathered} \tag{9}$$

Начальное состояние экономики задаётся значением капиталовооружённости при $t = 0$, а требуемое конечное – при $t = T$:

$$k(0) = k_0 \neq 0, \, k(T) = k_T \neq 0. \tag{10}$$

Задача оптимального управления

Обобщая всё вышесказанное, получим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{gathered} \dot{k}(t) = sf(k) - (\mu + n)k(t), \\ k(0) = k_0 \neq 0, k(T) = k_T \neq 0, T - \textit{фиксир.}, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} 0 \leq s(t) \leq 1, s(t) - \textit{управление}, \\ \exists\, t_1, t_2 : s(t_1) \neq 0, \, s(t_2) \neq 1, \end{gathered} \tag{12}$$

$$f' > 0\,,\ f'' < 0\,,\ f(0) = 0\,,$$
$$\lim_{k\to+\infty} f(k) = +\infty\,,\ \lim_{k\to 0} f'(k) = +\infty\,,\ \lim_{k\to+\infty} f'(k) = 0 \qquad (13)$$

Требуется максимизировать функционал

$$J(s(t)) = \int_o^T U\ \left[\,(1 - s(t))\,f(k\,)\,\right] e^{-\delta t}\,dt \to \max \qquad (14)$$

$$\frac{dU(\tilde{c})}{d\tilde{c}} = \dot{U}(\tilde{c}) > 0,\ \frac{d^2U(\tilde{c})}{d\tilde{c}^2} = \ddot{U}(\tilde{c}) < 0 \qquad (15)$$

для всех $\tilde{c}$, $0 < \tilde{c} < +\infty$

$$\lim_{\tilde{c}\to 0} \dot{U}(\tilde{c}) = +\infty\,,\ \lim_{\tilde{c}\to+\infty} \dot{U}(\tilde{c}) = 0 \qquad (16)$$

Решение задачи оптимального управления

Решение задачи проводится на основе принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона-Понтрягина записывается в следующем виде:

$$K(k, \vec{\psi}, s, t) = \psi_0 U[(1-s)f(k)]e^{-\delta t} + \psi[sf(k) - (\mu + n)k]\,, \qquad (17)$$

где $\overline{\psi}(t) = (\psi_0, \psi(t))$ – ненулевая непрерывная вектор-функция – сопряжённая переменная, $\psi_0 \equiv const \geq 0$.

Несложно показать, что случай $\psi_0 \equiv 0$ возможен лишь при $s^* \equiv 0$ или $s^* \equiv 1$, где s^* – оптимальное управление в задаче (11)-(16), что противоречит условиям задачи (данные случаи не рассматриваются из-за их нереалистичности: невозможно только потреблять или только сберегать).

Следовательно, $\psi_0 \equiv const > 0$. Положим $\psi_0 \equiv 1$ (умножение сопряжённой переменной на положительную константу ничего не изменит). С учётом вышесказанного, гамильтониан задачи имеет вид

$$H(k,\psi,s,t)=U\left[(1-s)f(k)\right]e^{-\delta t}+\psi\left[sf(k)-(\mu+n)k\right] \quad (18)$$

Введём новую переменную (она будет тоже называться сопряжённой).

$$q(t)=\psi(t)e^{\delta t} \quad (19)$$

Тогда (18) запишется в виде

$$H(k,\psi,s,t)=\{\, U\left[(1-s)f(k)\right]+q\left[sf(k)-(\mu+n)k\right]\,\}e^{-\delta t} \quad (20)$$

В фигурных скобках заключена сумма полезности и q, умноженной на чистые капитальные вложения на одного рабочего. Это наталкивает на мысль, что q есть вменённая (теневая) ценность дополнительного капитала, измеряемая в терминах полезности. Таким образом, выражение в фигурных скобках представляет общую полезность от сбережения в момент времени t, а гамильтониан – дисконтированную общую полезность.

Если $s^*(t)$ – оптимальное управление, $k(t)$ – соответствующая оптимальная траектория (для $s^*(t)$, $k(t)$ должны быть выполнены условия (11), (12)), то в силу принципа максимума существует такая непрерывная функция $\psi(t)$, что

$$\overbrace{\dot{\psi}(t)=-\frac{\partial H}{\partial k}}^{\text{сопряжённая система}} \quad (21)$$

$$\underbrace{H\left(k(t),\psi(t),s^*(t),t\right)=\max_{s\in[0,1]}H\left(k(t),\psi(t),s,t\right)}_{\text{условие максимума}} \quad (22)$$

Условие (22) означает, что при этих $k(t)$ и $\psi(t)$ оптимальное управление $s^*(t)$ будет максимизировать дисконтированную общую полезность в каждый момент времени *t*. Из (22) получаем, что

$$s^*(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{[U'_{\tilde{c}}]^{-1}(q(t))}{f(k(t))}, & \text{если } q(t) > U'_{\tilde{c}}\left[f(k(t))\right] \\ 0\,, & \text{если } q(t) \le U'_{\tilde{c}}\left[f(k(t))\right] \end{cases} \tag{23}$$

Таким образом, из принципа максимума вытекает, что если $s^*(t)$ – оптимальное управление, то оно удовлетворяет (23) и система дифференциальных уравнений (24), полученная из (11), (21) и (19), имеет решение.

$$\begin{gathered} \dot{k} = s^* f(k) - (\mu + n)k, \\ \dot{q} = q\left(\delta - s^* f'(k) + \mu + n\right) - \left(1 - s^*\right) f'(k) U'_{\tilde{c}}[(1 - s^*) f(k)] \\ k(0) = k_0\,,\, k(T) = k_T \end{gathered} \tag{24}$$

С целью исследовать качественное поведение решений системы (24) найдём участки знакопостоянства производных $\dot{k}(t)$ и $\dot{q}(t)$. В случае А) $q(t) > U'_{\tilde{c}}\left[f(k(t))\right]$ имеем

$$\begin{array}{ll} \dot{q}(t) < 0 \ \text{ при } k < k^* & \dot{k}(t) < 0 \ \text{ при } q < U'_{\tilde{c}}\left[f(k) - (\mu + n)k\right] \\ \dot{q}(t) = 0 \ \text{ при } k = k^* & \dot{k}(t) = 0 \ \text{ при } q = U'_{\tilde{c}}\left[f(k) - (\mu + n)k\right] \\ \dot{q}(t) > 0 \ \text{ при } k > k^* & \dot{k}(t) > 0 \ \text{ при } q > U'_{\tilde{c}}\left[f(k) - (\mu + n)k\right] \end{array}$$

где k^* - единственный корень уравнения $f'(k) = \delta + \mu + n$.

Для случая Б) $q(t) \le U'_{\tilde{c}}\left[f(k(t))\right]$ имеем

$$\dot{q}(t) < 0 \qquad \text{при } k < k^*$$

$$\text{при } k \geq k^* \text{ и } q < \frac{f'(k)U'_{\tilde{c}}\left[f(k)\right]}{\delta + \mu + n}$$

$$\dot{q}(t) = 0 \qquad \text{при } k \geq k^* \text{ и } q = \frac{f'(k)U'_{\tilde{c}}\left[f(k)\right]}{\delta + \mu + n}$$

$$\dot{q}(t) > 0 \qquad \text{при } k \geq k^* \text{ и } q > \frac{f'(k)U'_{\tilde{c}}\left[f(k)\right]}{\delta + \mu + n}$$

$$\dot{k}(t) < 0 \qquad \forall\, k, q$$

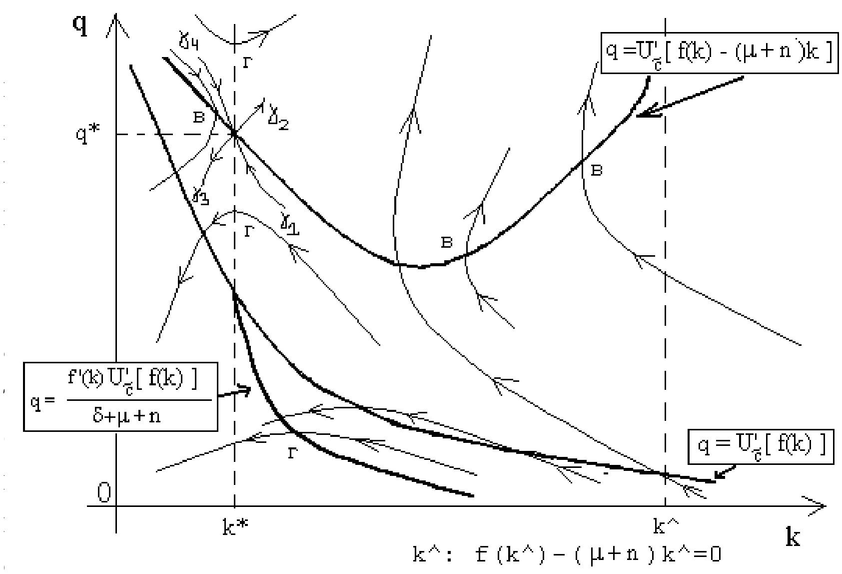


Рисунок 1. Возможные траектории

Для проведения численных расчётов автором написана программа, работающая в системе компьютерной алгебры MAPLE 5 R5.

Пользователем задаются $f(k)$, $U(\tilde{c})$, μ, n, δ, T, k_0, k_T. Один из результатов работы программы – картина экстремальных управлений.

Пример 1.

Конкретизируем функции $f(k), U(\tilde{c})$, константы μ, n, δ :

$$f(k) := \sqrt{k},\ U(\tilde{c}) := \sqrt{\tilde{c}}, \mu := 0.2, n := 0, \delta := 0.1.$$

Результат представлен на рисунке 2. Экстремальные траектории построены. У нас есть условия $k(0) = k_0$, $k(T) = k_T$, время T фиксировано. Если на рис.2 провести вертикальную линию $k = k_0$ (на рисунке она не отображена), то можно заметить, что в зависимости от выбора начального значения q_0 (оно получается пересечением вертикальной прямой и какой-либо из экстремалей) сопряжённой переменной $q(t)$ движение будет происходить по различным траекториям. Поэтому решение поставленной задачи оптимального управления сводится к определению *существуют ли такие значения* q_0, *что, двигаясь по экстремальной траектории, выходящей из* (k_0, q_0), *в момент времени T мы получим* $k(T) = k_T$, и нахождению их, если они существуют.

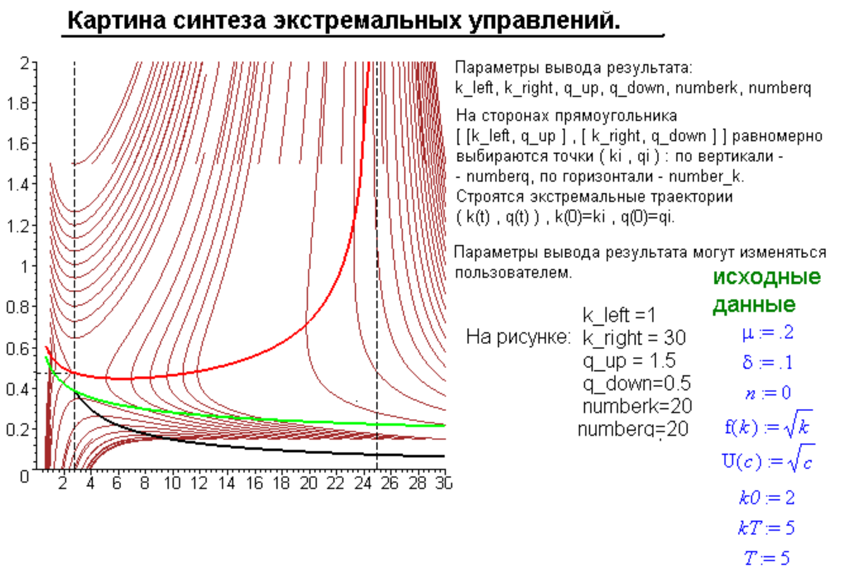


Рисунок 2. Результаты моделирования в примере 1

При заданном k_0 и любом фиксированном q_0 необходимо решить следующую задачу Коши:

$$\dot{k}(t) = C(k_0, q_0, k, q),$$
$$\dot{q}(t) = D(k_0, q_0, k, q),$$
$$k(0) = k_0, \tag{3.9}$$
$$q(0) = q_0,$$

где

$$C(k_0, q_0, k, q) = \begin{cases} f(k) - (\mu + n)k - \left[U'_{\breve{c}}\right]^{-1}(q), & \text{если } q_0 > U'_{\breve{c}}\left[f(k_0)\right] \\ (-\mu - n)k, & \text{если } q_0 \le U'_{\breve{c}}\left[f(k_0)\right] \end{cases}$$

Если полученная траектория пересекает $q = U'_{\breve{c}}\left[f(k)\right]$, то требуется решить и задачу:

$$\begin{gathered}\dot{k}(t) = C(k^*, q^*, k, q\,),\\ \dot{q}(t) = D(k^*, q^*, k, q\,),\\ k(0) = k^*,\\ q(0) = q^*,\end{gathered} \tag{3.10}$$

где $k^* = k(t^*)$, $q^* = q(t^*)$, t^* – момент пересечения траектории и кривой.

Итоговое

$$k(t) = \begin{cases} k(t) \quad \textit{из системы } (3.9), \textit{если } t \in [0, t^*] \\ k(t - t^*) \quad \textit{из системы } (3.10), \textit{иначе} \end{cases}$$

Получаем $k(t, q_0)$. Объединение $k(T, q_0)$ по всевозможным q_0 есть множество достижимости в момент времени $T : X(T)$. Пересечение $X(T)$ и прямой $k = k_T$ позволяет выделить начальное значение сопряжённой переменной, соответствующее оптимальной траектории и построить последнюю.

Пример 2.

Для $f(k) := \sqrt{k}$, $U(\tilde{c}) := \sqrt{\tilde{c}}$, $\mu := 0.2$, $n := 0$, $\delta := 0.1$, k_0=2, k_T =5, T=5 программа выдаёт следующие результаты (рис. 3):

Задавая $k_0 < k_T$, мы моделируем случай экономического развития, роста, $k_0 > k_T$ – деградации экономики.

Одно из направлений дальнейшей работы – применение данной модели и программного комплекса для расчёта оптимальных траекторий накопления капитала для целого ряда европейских стран и США.

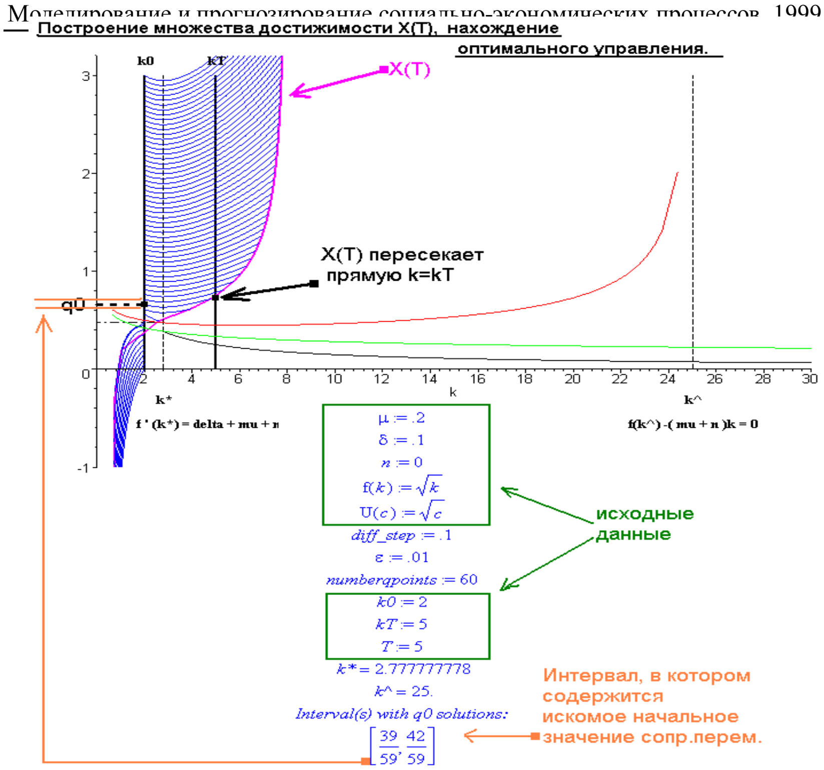


Рисунок 3. Результаты моделирования в примере 1

Литература

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
2. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.

Приложение

Получение окончательного результата с заданной точностью.

Сужение интревала:

Interval(s) with q0 solutions:

$$\left[\frac{40}{59}, \frac{121}{177}\right]$$

Interval(s) with q0 solutions:

$$\left[\frac{1082}{1593}, \frac{361}{531}\right]$$

Interval(s) with q0 solutions:

$$\left[\frac{9740}{14337}, \frac{3247}{4779}\right]$$

Interval(s) with q0 solutions:

$$\left[\frac{29221}{43011}, \frac{87664}{129033}\right]$$

Interval(s) with q0 solutions:

$$\left[\frac{788968}{1161297}, \frac{788969}{1161297}\right]$$

Interval(s) with q0 solutions:

$$\left[\frac{7100714}{10451673}, \frac{2366905}{3483891}\right]$$

Interval(s) with q0 solutions:

$$\left[\frac{63906427}{94065057}, \frac{63906428}{94065057}\right]$$

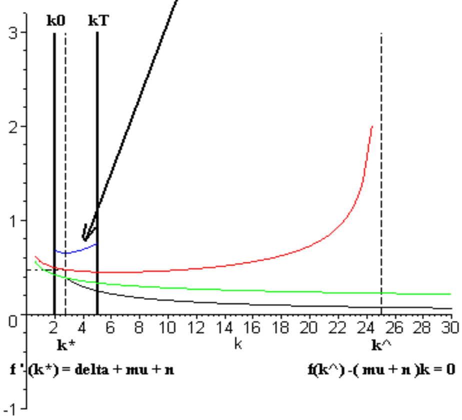
Interval(s) with q0 solutions:

$$\left[\frac{575157844}{846585513}, \frac{575157845}{846585513}\right]$$

q0 solution(s):

$$q0 = \frac{5176420604}{7619269617}, \quad J = 2.957245712$$

оптимальная траектория



искомое начальное значение сопряженной переменной

значение функционала на оптимальной траектории

Таблица значений оптимального управления.

[t,s*(t)]:

[[0, .3829945380], [.1, .3824681904], [.2, .3817201823],
[.3, .3807556027], [.4, .3795796128], [.5, .3781974479],
[.6, .3766144228], [.7, .3748359336], [.8, .3728674603],
[.9, .3707145678], [1.0, .3683829054], [1.1, .3658782075],
[1.2, .3632062898], [1.3, .3603730487], [1.4, .3573844568],
[1.5, .3542465586], [1.6, .3509654658], [1.7, .3475473509],
[1.8, .3439984407], [1.9, .3403250085], [2.0, .3365333668],
[2.1, .3326298572], [2.2, .3286208428], [2.3, .3245126977],
[2.4, .3203117964], [2.5, .3160245047], [2.6, .3116571677],
[2.7, .3072161000], [2.8, .3027075738], [2.9, .2981378091],
[3.0, .2935129625], [3.1, .2888391153], [3.2, .2841222649],
[3.3, .2793683135], [3.4, .2745830577], [3.5, .2697721802],
[3.6, .2649412401], [3.7, .2600956641], [3.8, .2552407390],
[3.9, .2503816041], [4.0, .2455232444], [4.1, .2406704839],
[4.2, .2358279806], [4.3, .2310002222], [4.4, .2261915206],
[4.5, .2214060091], [4.6, .2166476398], [4.7, .2119201810],
[4.8, .2072272158], [4.9, .2025721414], [5.0, .1979581689],
[5, .1979581689]]

Оптимальные вложения в научно-технический прогресс

Антипов Е.В.

В работе рассматривается агрегированная макроэкономическая модель, базирующаяся на производственной функции. Модель учитывает влияние эндогенного научно-технического прогресса на национальный доход. Суть исследования – найти оптимальное соотношение между капиталовложениями в производство и научно-технический прогресс для наибыстрейшего достижения цели – заданного объема основных фондов. Управляющий параметр – доля национального дохода, инвестируемого в науку, – есть функция времени. В качестве мультипликатора прогресса автор рассматривает *s*-образную функцию, что отличается от неоклассического случая. По мнению автора, *s*-образный мультипликатор экономически более оправдан. Рассмотрение *s*-образного мультипликатора вместо неоклассического ведет к изменению вида основных элементов модели – особой поверхности (поверхности, на которой предельная фондоотдача и предельная эффективность капиталовложений в научно-технический прогресс равны) и кривой переключения. И следовательно, меняется картина синтеза оптимальных траекторий. При исследовании модели используется принцип максимума Понтрягина. Для конкретного примера с s-образным мультипликатором в пространстве состояний приведен синтез оптимальных траекторий.

Optimum Investments in Scientific and Technical Progress

Antipov E.V

The author considers the aggregated macroeconomic model basing on the production function. The model takes into account influence of endogenous scientific and technical progress on the national income. The essence of the research – to find an optimum ratio between capital investments in manufacture and investments in scientific and technical progress for the fastest achievement of the purpose – the given volume of fixed capital. The managing parameter – a share of the national income, invested in science, is a function of time. As the progress multiplier the author considers *s*-figurative function, that differs from neo-classic case. In opinion of the author, the *s*-figurative multiplier is more true to economics. The consideration of the *s*-figurative multiplier instead of neo-classic conducts to changes in appearance of basic model elements – the special surface (a surface, on which marginal capital productivity and marginal effectiveness of investments in scientific and technical progress are equal) and the switching curve. And therefore, the synthesis of optimum trajectories changes. At research of the model the Pontryagin's principle of maximum is used. For a concrete example with the s-figurative multiplier the synthesis of optimum trajectories is given.

Большинство развитых стран достигло высоких уровней развития вследствие опережающего роста науки и инноваций по отношению к промышленности. При этом такие страны, как Япония, даже в трудные периоды истории, наращивали ассигнования на НИОКР, учитывая их значение для будущего подъема общественного производства.

Данная работа посвящена анализу оптимальных пропорций развития промышленности и науки, соотношения двух вариантов развития – интенсивного и экстенсивного.

Формулировка модели

В работе рассматривается односекторная замкнутая модель экономики. Национальный доход делится между капиталовложениями на расширение основных фондов и вложениями в науку, ведущими к улучшению производства. Не ограничивая общности, будем считать, что потребление отсутствует (можно было бы, например, считать, что норма потребления фиксирована, т.е. составляет заданную часть национального дохода, но это лишь изменит вид производственной функции).

Будем считать, что прогресс нейтрален по Хиксу, т.е. величина Y выпуска определяется формулой

$$Y = A(Q)F(K, L) \tag{1}$$

Здесь K и L – объем основных фондов и трудовых ресурсов соответственно; $F(K,L)$ – производственная функция; Q – суммарный объем капиталовложений в НТП; $A(Q)$ – мультипликатор прогресса, показывающий эффективность инвестиций в науку.

Будем считать, что $F(K,L)$ удовлетворяет неоклассическим условиям:

1) $F(K,L)$ – линейно-однородна

$$(k = K/L,\ y = Y/L,\quad f(k) = F\left(\frac{K}{L},1\right) \ \Rightarrow\ \ y = f(k))$$

2) $f' > 0,\ f'' < 0,\ f(0) = 0,\ \lim\limits_{k\to 0} f'(k) = \infty,\ \lim\limits_{k\to\infty} f'(k) = 0$.

Пусть, кроме того, производственная функция имеет вид $F(K,L) = g(K)h(L)$. Например, функция Кобба-Дугласа удовлетворяет всем этим условиям[1].

В качестве мультипликатора $A(Q)$ будем рассматривать s-образную функцию, производная которой обращается в бесконечность в некоторой точке a, такую что:

- $A(0) = 1,\ \lim\limits_{Q\to\infty} A(Q) = \infty$
- $A'(Q) > 0$ *при* $Q > 0$, $A'(0) = 0$
- $\lim\limits_{Q\to a} A'(Q) = \infty,\ \lim\limits_{Q\to\infty} A'(Q) = 0$
- $A''(Q) > 0$ *при* $Q < a$, $A''(Q) < 0$ *при* $Q > a$.

Мультипликатор, представляющий из себя s-образную функцию, отличается от неоклассического мультипликатора. Вид неоклассического мультипликатора представлен на рис.1.

---

[1] $F(K,L) = cK^{\alpha}L^{\beta}$, $c, \alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

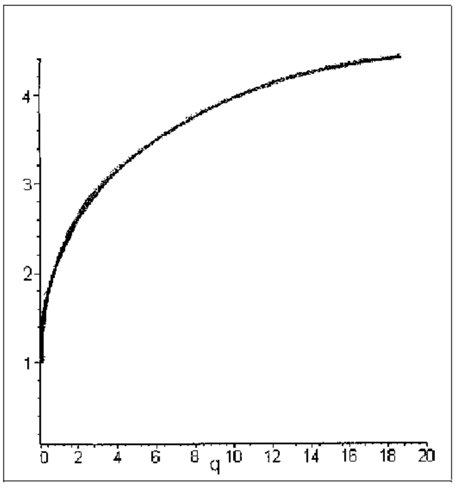


Рис.1. Неоклассический мультипликатор

Напомним, что в неоклассическом варианте[2] при возрастании инвестиций в науку от нуля происходит стремительный рост мультипликатора $(\lim\limits_{Q\to 0} A'(Q)=\infty)$, который влечет резкий рост выпуска. В нашем же случае "предельный продукт вложений в науку" (именно ему соответствует мультипликатор) очень мал, когда суммарные инвестиции в НТП близки к нулю. Лишь когда они достигнут определенного порогового уровня, происходит быстрый рост национального дохода, обусловленный, например, качественным изменением технологий, а следовательно, и производительности труда. Качественное изменение технологий требует немалых вложений в науку, поэтому неоклассический мультипликатор не совсем экономически оправдан.

[2] Неоклассические условия на A(Q):
$A'(Q)>0\,, A''(Q)<0\,, A(0)=1,$
$\lim\limits_{Q\to\infty} A(Q)=\infty$, $\lim\limits_{Q\to\infty} A'(Q)=0$, $\lim\limits_{Q\to 0} A'(Q)=\infty$

Например, перечисленным требованиям на мультипликатор удовлетворяет функция

$$A^*(q) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}q - \sqrt{1-q}, \text{ при } q \le 1 \\ (q-1)^{1/3} + \frac{3}{2}, \text{ при } q > 1 \end{cases},$$

график которой и ее производной представлен на рис. 2-3.

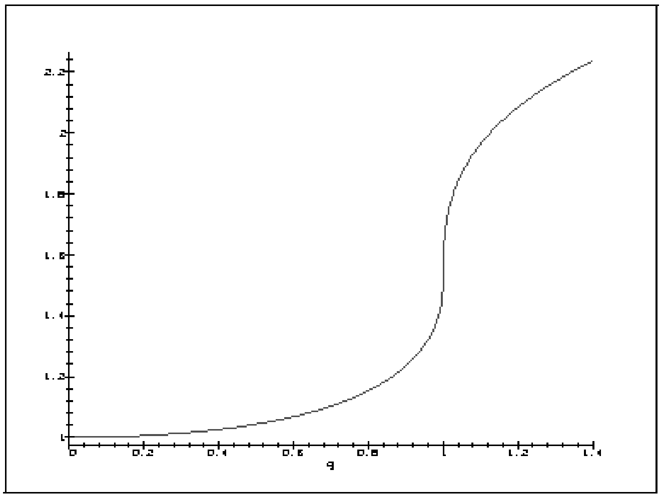


Рис. 2: S-образный мультипликатор A(Q)

S-образный мультипликатор в отличие от неоклассического позволяет разделить страны по уровню развития сферы НИОКР на две группы.

К первой группе можно отнести страны, уже пережившие резкий рост мультипликатора. Объем капиталовложений в науку в этих странах превысил необходимую для качественного изменения технологий величину. В этой группе лидируют США, Япония и ФРГ.

Во вторую группу попадают страны, в которых объем инвестиций в науку недостаточен для качественного скачка. Россия скорее всего попадает именно в эту группу.

Пусть u, $0 \le u \le 1$, – норма накопления, т.е. доля национального дохода Y, направляемая на увеличение основных фондов. Тогда

$$\dot{K} = uY = uA(Q)g(K)h(L) \qquad (2)$$

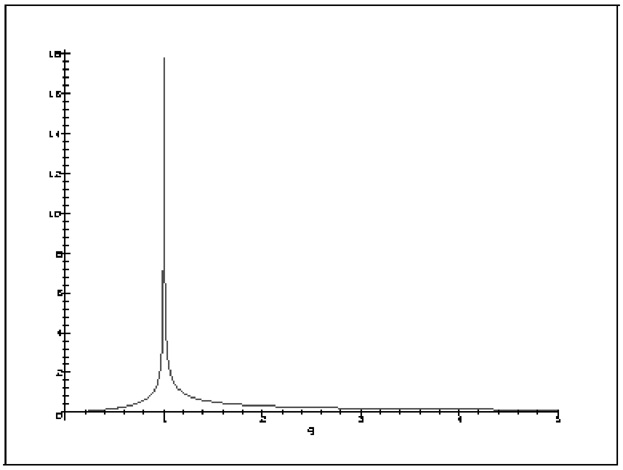


Рис. 3: Производная s-образного мультипликатора A'(Q)

Величина $(1 - u)$ представляет собой долю национального дохода, инвестируемую в "науку". Следовательно,

$$\dot{Q} = (1-u)Y = (1-u)A(Q)g(K)h(L) \qquad (3)$$

Наконец, относительно трудовых ресурсов будем считать, что их рост подчиняется закону

$$\dot{L} = p(L) \qquad (4)$$

где $p(L)$ – такая функция, что величина L не может стать бесконечной за конечное время. Достаточными условиями для этого являются, например, условия Филлипова[3].

Пусть (K_0, Q_0, L_0) – произвольное начальное состояние. Задание управления $u(t)$, $t \geq 0$, $0 \leq u(t) \leq 1$, позволяет из уравнений (2)-(4) определить траекторию ($K(t)$, $Q(t)$, $L(t)$).

Постановка задачи

Рассмотрим следующую экстремальную задачу для сформулированной модели: за кратчайшее время достигнуть заданного уровня $\overline{K}$ объема основных фондов. Оптимизационный параметр – доля национального дохода, инвестируемого в производство, – есть функция времени.

Таким образом, необходимо решить систему

$$\begin{cases} \dot{K} & = & uA(Q)g(K)h(L) \\ \dot{Q} & = & (1-u)A(Q)g(K)h(L) \\ \dot{L} & = & p(L) \\ K(0) & = & K_0 \\ Q(0) & = & Q_0 \\ L(0) & = & L_0 \\ K(T) & = & \overline{K} \\ 0 \leq u & = & u(t) \leq 1 \\ L & = & T \to \min \end{cases} \qquad (5)$$

При решении задачи используется принцип максимума Понтрягина.

---

[3] $|p(L)| \leq c(|L|+1)$ или $(p(L), L) \leq c(|L|^2+1)$.

Многие аспекты работы будет рассматриваться на примере (*), в котором $A=A^*(Q)$, $g = g^*(K) = \sqrt{K}$, $h = h^*(L) = 1$, $\overline{K} = 10$.

Принцип максимума Понтрягина для задачи (5)

Пусть $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ – вектор сопряженных переменных, соответствующий системе (5). Переменные ψ_i интерпретируются как цены факторов производства. Функция Гамильтона-Понтрягина для нашей задачи имеет следующий вид: $H = \psi_1 uY + \psi_2(1-u)Y + \psi_3 p(L)$. Выпишем сопряженную систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_1 u \dfrac{\partial Y}{\partial K} - \psi_2 (1-u)\dfrac{\partial Y}{\partial K} & (6a) \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 u \dfrac{\partial Y}{\partial Q} - \psi_2 (1-u)\dfrac{\partial Y}{\partial Q} & (6b) \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_1 u \dfrac{\partial Y}{\partial L} - \psi_2 (1-u)\dfrac{\partial Y}{\partial L} - \psi_3 p'(L) & \end{cases}$$

В нашей задаче терминальное многообразие задается уравнением $K - \overline{K} = 0$.

Поэтому условия трансверсальности имеют вид $\psi_1(T) = 1$, $\psi_2(T) = \psi_3(T) = 0$.

Если $u(t)$ – оптимальное управление, то оно в каждый момент времени максимизирует функцию H. Введем в рассмотрение функцию $\varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$. Тогда

$$H'_u = \psi_1 Y - \psi_2 Y = (\psi_1 - \psi_2)Y = \varphi Y .$$

Из условия максимизации функции H следует

$$u = \begin{cases} 0\,, & при\ \varphi < 0 \quad (\psi_1 < \psi_2) \\ 1\,, & при\ \varphi > 0 \quad (\psi_1 > \psi_2) \end{cases}.$$

Но есть еще один вариант: $\varphi = 0, т.е.\ \psi_1 = \psi_2$. В этом случае значение управления *u* непосредственно из условия максимума функции *H* определить нельзя. Существует две возможности: либо равенство имеет место лишь в одной точке, либо оно сохраняется тождественно в течение некоторого интервала времени. В первом варианте значение управления не имеет особого значения (т.к. это множество меры ноль) - можно считать, например, *u=1*. Второй вариант $\psi_1(t) = \psi_2(t)\,,\ t \in [\tau_1, \tau_2]$ приводит нас к особому режиму и требует детального рассмотрения.

Особая кривая

Итак, $\psi_1(t) = \psi_2(t)\,,\ t \in [\tau_1, \tau_2]$. Тогда $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2\,,\ t \in [\tau_1, \tau_2]$. Вычитая (6*b*) из (6*a*), мы приходим к следующему равенству:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial Y}{\partial Q}\,. \tag{7}$$

Т.к. $Y = A(Q)g(K)h(L)$, то

$$\frac{\partial Y}{\partial K} - \frac{\partial Y}{\partial Q} = A'(Q)g'(K)h(L)\left[\frac{A(Q)}{A'(Q)} - \frac{g(K)}{g'(K)}\right] \tag{8}$$

и (7) эквивалентно (9) при Q>0 (т.к. $A'(Q), g'(K), h(L) > 0$ при $Q > 0$)

$$\frac{A(Q)}{A'(Q)} = \frac{g(K)}{g'(K)}\,. \tag{9}$$

Поверхность в фазовом пространстве, определяемую уравнением (9), назовем особой поверхностью. Таким

образом, на особой поверхности предельный продукт капитала и "предельный продукт вложений в науку" равны. Поскольку переменная L не участвует в уравнении (9), то особая поверхность является цилиндрической, и ее ось параллельна оси координат *OL*. Проекцию особой поверхности на плоскость *(K,Q)* назовем особой кривой.
Выясним вид особой кривой.

Пусть $\tilde{A}(Q) = \dfrac{A(Q)}{A'(Q)}$, $\tilde{g}(K) = \dfrac{g(K)}{g'(K)}$. Обозначим через $\tilde{A}^{-1}(Q)$ функцию, обратную к $\tilde{A}(Q)$, и из (9) получаем

$$Q = \tilde{A}^{-1}(\tilde{g}(K)) \tag{10}$$

Таким образом, если оптимальная траектория *(K(t),Q(t),L(t))* такова, что $\psi_1(t) = \psi_2(t)$ в течение некоторого отрезка времени $[\tau_1, \tau_2]$, то эта траектория проходит по особой поверхности (9), проекция которой на плоскость (K,Q) описывается уравнением (10).

Из равенства $\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\partial H}{\partial u}\right)$ нулю на особой кривой мы можем найти значение оптимального управления на ней:

$$u^* = \frac{\tilde{A}'(Q)}{\tilde{A}'(Q) + \tilde{g}'(K)} \tag{11}$$

Итак, в рамках данной модели существуют три варианта распределения национального дохода: либо мы весь доход вкладываем в науку, либо все направляем на расширение основных фондов, либо движемся по особой поверхности, распределяя национальный доход по закону (11).

Кривая переключения

Попытаемся найти множество точек, в которых функция φ обращается в ноль. На терминальном многообразии $\varphi(T)=1$ (т.к. $\psi_1(T)=1, \psi_2(T)=0$). В силу непрерывности функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, неравенство $\varphi>0$ имеет место в некоторой окрестности терминального многообразия, т.е. оптимальное управление $u(t)=1$. Значит, завершающий участок развития экономики в рамках нашей модели всегда является экстенсивным.

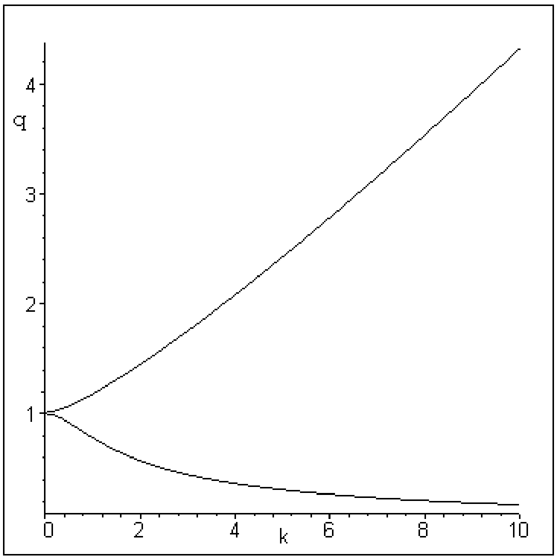


Рис.4 График кривой (10) для примера (*)

Можно вывести уравнение кривой, на которой функция φ обращается в ноль при движении в обратном времени от гиперплоскости $K=\overline{K}$. Оно имеет вид

$$Q = \widetilde{A}^{-1}\left(g(K)\int_{K}^{\overline{K}} \frac{dk}{g(k)} \right) \qquad (12)$$

Сопоставляя уравнения (10) и (12) для конкретных функций $A(Q)$ и $g(K)$, можно найти точки пересечения особой кривой и кривой (12), называемой обычно кривой переключения. На этой кривой происходит "переключение" с интенсивного на экстенсивный путь развития.

Особая кривая и кривая переключения для примера (*)

Кривая вида (10) для примера (*) изображена на рис. 4. Однако нижнюю ветвь мы можем отбросить, т.к. в рамках нашей модели суммарные капиталовложения в науку могут только возрастать. Таким образом, особой кривой будет являться верхняя ветвь кривой (10). Кривая переключения для примера (*) изображена на рис. 5.

Найдем точки пересечения особой кривой и кривой переключения для примера (*). Можно утверждать, что в нашем примере равенство значений функции $\widetilde{A}^{-1}(Q)$ возможно лишь при совпадении аргументов функции. Таким образом, точка пересечения определяется из уравнения

$$g(K)\int_{K}^{\overline{K}} \frac{dk}{g(k)} = \widetilde{g}(K) \text{ или}$$

$$\int_{K}^{\overline{K}} \frac{dk}{g(k)} = \frac{1}{g'(K)}. \qquad (13)$$

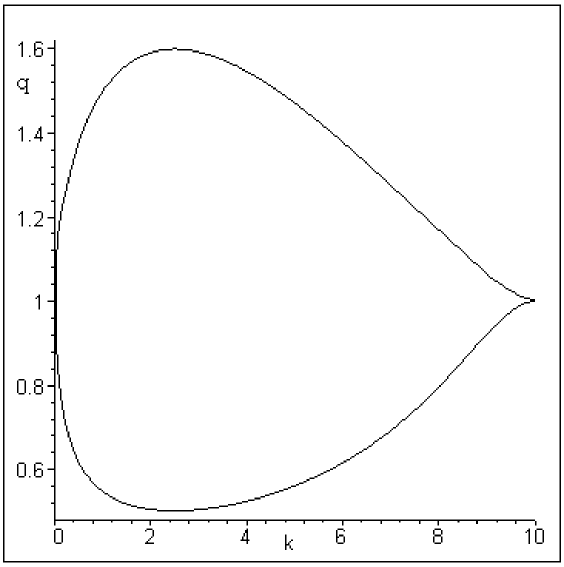


Рис.5 Кривая переключения для примера (*)

Поскольку $g(K)$ растет с ростом K, а $g'(K)$ убывает, то левая часть уравнения (13) является функцией, убывающей от ∞ до 0, а правая - возрастающая от 0 до ∞. Следовательно, уравнение (13) имеет единственный корень, который мы обозначим за $\breve{K}$. Его значение можно вычислить; оно равно 2.5. Соответствующее значение Q, определяемое из (12), обозначим $\breve{Q}$. Можно показать, что $\breve{K}$ – вершина верхней ветви кривой переключения. Действительно, совмещение особой кривой и кривой переключения для примера(*) на рис.6 подтверждает все вышесказанное.

Картинка, изображенная на рис. 6, получена для $A=A^*(Q)$, $g=g^*(K)$, $h=h^*(L)$. Этот результат можно обобщить. Подобные особая кривая и кривая переключения будут справедливы при следующих ограничениях:

1. мультипликатор $A(q)$, помимо требований из первого

раздела, удовлетворяет условию логарифмической выпуклости вниз на $(0, a)$ т.е. $(\ln A(q))'' > 0$ при $q < a$

2. $g(k) = k^i$, $0 < i \leq 1$.

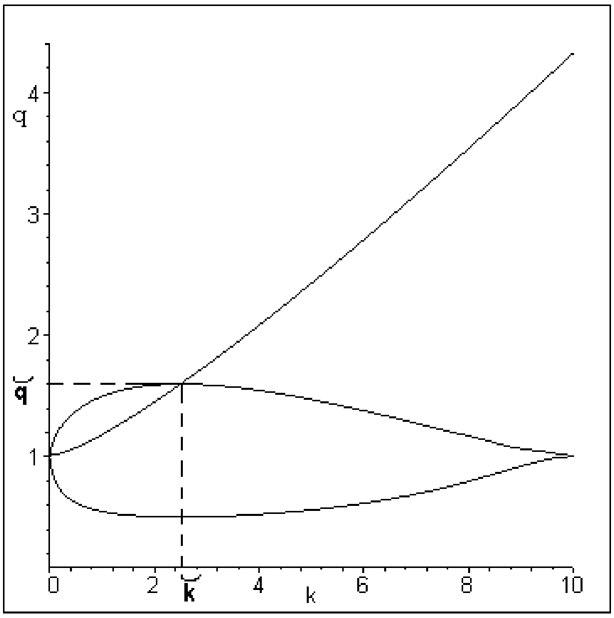


Рис.6 Итоговая картинка для примера (*)

Заметим, что вид функции $h(L)$ никак не влияет на особую кривую и кривую переключения.

Синтез оптимальных траекторий для примера (*)

Синтез оптимальных траекторий был осуществлен в плоскости (K,Q) (рис.7).

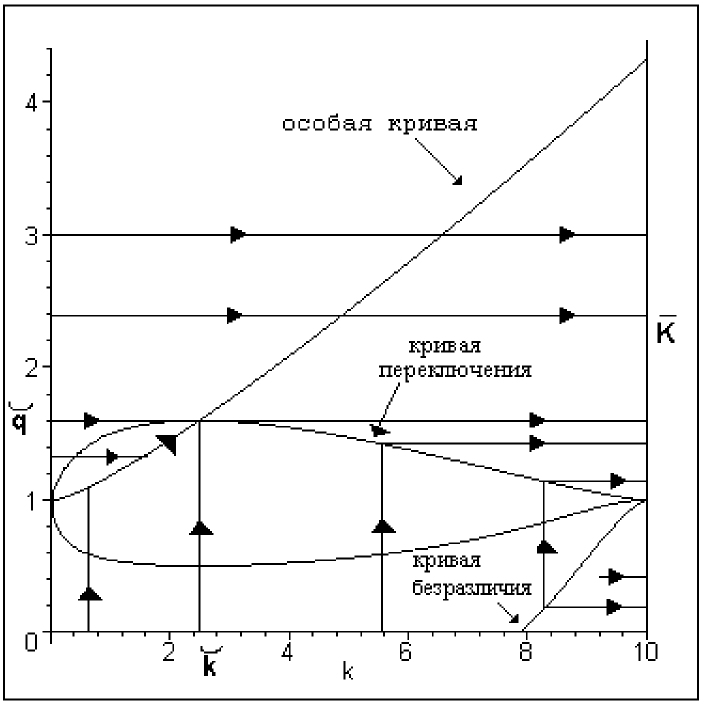


Рис.7 Картина синтеза оптимальных траекторий для примера (*)

Отметим, что экстенсивному варианту развития на рисунке соответствуют горизонтальные стрелки, а интенсивному - вертикальные. В этой работе доказательство оптимальности построенного синтеза не приводится.

Если начальный суммарный объем капиталовложений в науку достаточно велик (не меньше $\breve{Q}$), то наиболее быстро мы достигнем цели ($\overline{K}$), направляя весь национальный доход на расширение основных фондов. Нецелесообразность вложений в науку в этом случае можно объяснить так: эффект увеличения мультипликатора прогресса не будет столь значителен (при $Q > \breve{Q}$), чтобы компенсировать замедление возрастания объема основных фондов (замедление же будет связано с тем, что часть средств отвлекается на науку).

Более же типичным является следующий случай: начальный объем основных фондов K_0 много меньше $\overline{K}$ ($K_0 < \breve{K}$) и суммарный объем капиталовложений в науку также невелик $(Q_0 < \breve{Q})$. Тогда траектория выходит на особую поверхность и движется по ней до пересечения с поверхностью переключения, после чего сходит с особой поверхности.

Можно показать, что величина $\breve{K}$ неограниченно растет с ростом $\overline{K}$. Неограниченный рост величины $\breve{K}(\overline{K})$ означает, в частности, что при увеличении величины $\overline{K}$ отрезок времени, в течение которого оптимальная траектория находится на особой поверхности, неограниченно увеличивается. По аналогии с тем же феноменом при исследовании оптимальных траекторий в линейных моделях назовем особую поверхность магистралью.

Поскольку уравнение магистрали имеет вид $\dfrac{A(Q)}{A'(Q)} = \dfrac{g(K)}{g'(K)}$, то ее экономическая характеристика такова: на этой поверхности и только на ней предельная фондоотдача и предельная эффективность капиталовложений в научно-технический прогресс равны. Таким образом, при движении по магистрали капиталовложения распределяются в такой пропорции, что равенство предельных продуктов капитала и науки сохраняется тождественно.

Остается рассмотреть случай $K_0 > \breve{K}$, $Q_0 < \breve{Q}$. Здесь для больших K появляется "кривая безразличия". Для точек этой кривой оптимальных стратегий будет две: первая – вертикальное движение до верхней ветви кривой переключения, после этого горизонтальное движение; вторая стратегия – сразу горизонтальное движение. Для точек, лежащих ниже кривой безразличия оптимальной будет вторая стратегия. Для точек, лежащих выше кривой безразличия и ниже верхней ветви кривой переключения, оптимальной будет первая стратегия.

Направления дальнейшего исследования

В модель можно включить амортизацию как фактор, уменьшающий стоимость основных фондов во времени. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\dot{K} = uA(Q)g(K)h(L) - \mu K\ ,$$

где μ – норма амортизации.

Другой вариант усовершенствования модели – в качестве мультипликатора $A(Q)$ рассмотреть s-образную функцию, удовлетворяющую всем условиям из первого раздела, но с конечной производной в точке a. Такой мультипликатор будет еще более реалистичен.

Литература

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973.
3. *Зеликина Л.Ф.* Оптимальные вложения в научно-технический прогресс в макроэкономических моделях и магистральные теоремы // Экономика и математические методы. – 1975, 11. – №3, С. 453-467.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.

Выбор стратегии продаж (игровой подход)

Дармостук А.А.

В Интернет все время появляются новые схемы продаж. Например, потребителю предоставляется возможность самому назначать цену на товар, но при этом нельзя выбрать марку продукта. Понятно, что подобная схема не будет распространена на все товары.

По сути назначение цены покупателем, когда он не может выбирать марку товара, означает, что фирма, реализующая (или производящая данный продукт) отказывается от его рекламы. В данной работе рассмотрена модель, в которой фирма решает рекламировать ей или нет определенный товар на обычном рынке, после чего она распространена на Интернет-торговлю.

В работе определены условия, при выполнении которых и потребителю и компании выгодно работать с механизмом назначения цен покупателем.

Selection of Sale Strategy

Darmostuk A.

There are constantly appear new methods of sale in Internet. For example, consumer can set a good's price himself, but he can't choose a product brand. It is clear, that such method will not be spreading on all goods.

If a consumer set a good's price and can't choose a product brand, then it means that the firm, selling this good, refuses advertising. In this article model is considered, in which the firm decides whether advertise the good or not. Then this model was spreading on Internet selling.

In this article such conditions defined, that if they fulfil then it is advantageous to consumer and company to use the method of consumer set good's price.

Введение

В Интернет все время возникают новые способы продаж. Например, людям была дана возможность самим называть устаивающую их цену на продукт, но потребители не имеют возможности указать марку или компанию, которую они предпочитают. Пока эта схему распространили на продажу небольшого перечня товаров (это, например, авиабилеты, комнаты в отелях, машины). Но понятно, что этим дело не ограничится.

Очевидно, что подобная схема торговли распространится не на все товары. В данной работе будет построена модель, призванная выяснить какие продукты выгодно продавать подобным образом.

Постановка задачи

По сути назначение цены покупателем, когда он не может выбирать марку товара, означает, что фирма, реализующая (или производящая данный продукт) отказывается от его продвижения на рынок. В самом деле, бессмысленно тратить огромные деньги на рекламу, чтобы потом потребитель мог лишь случайно купить этот товар. Поэтому сначала рассмотрим случай, когда фирма решает продвигать ей или нет определенный товар на обычном рынке. А потом распространим ее на Интернет-торговлю.

Замечание: под **продвижением товара** будем понимать повышение имиджа компании, рекламу марки, распространение информации о товаре: его характеристиках, цене, месте продажи.

Пусть у фирмы две стратегии:

1. Продвигать товар на рынок
2. Отказаться от продвижения товара

У потребителя четыре стратегии:

1. купить товар этой фирмы (продвигаемый или нет)
2. купить продвигаемый товар другой фирмы
3. купить товар, который не продвигается у другой фирмы
4. отказаться от покупки

Фирма делает ход первой.

Цель: выяснить условия, при которых и фирме и потребителю выгодно продвижение (или отказ от него) товара данной фирмой. Если же все-таки товар продвигается на рынок, то определить факторы, влияющие на распределение рекламного бюджета.

Экстенсивная формы игры

На рис. 1 представлены возможные стратегии игроков.

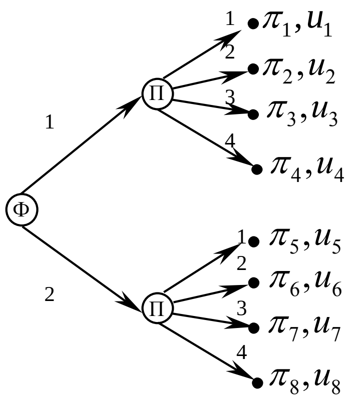


Рисунок 1. Возможные стратегии

Здесь "Ф" – фирма, "П" – потребитель. Цифры обозначают номера стратегий.

Описание модели

Предпосылки модели

1. Очевидно, что, если фирма будет продвигать товар на рынок, то его цена будет выше, чем того же "нерекламируемого " продукта. Это произойдет в силу того, что в итоге фирме надо будет компенсировать затраты на рекламу. Реклама товара призвана убедить покупателя, что данный продукт чем-то лучше аналогов, она информирует о достоинствах и умалчивает о недостатках. Если же товар не рекламируется, то для потребителя он ничем не отличается от аналогичных товаров. При отказе от продвижения товара исчезает реклама в традиционном смысле этого слова, но остаются затраты на развитие сбытовой сети.

2. Обычно экономическая ценность товара определяется как цена лучшего из доступных покупателю альтернативных товаров (цена безразличия) плюс ценность для него тех свойств данного товара, которые отличают его от этой лучшей альтернативы. В данной модели под **экономической ценностью товара** будем понимать немного другое понятие. Как уже было сказано выше, будет предполагаться, что для потребителя все нерекламируемые товары (имеются в виду однотипные товары с минимально необходимым с точки зрения покупателя стандартным набором функций, свойств) обладают одной и той же ценностью. Ее и примем за **цену безразличия**. В результате рекламной кампании потребитель узнает о каких-то еще уникальных характеристиках товара, за которые он готов заплатить сверх цены безразличия.

3. Теперь введем понятие "полезность". Под **полезностью** товара будем понимать экономическую ценность товара за вычетом расходов по его приобретению.

Под расходами будем понимать не только стоимость товара, но и некие альтернативные издержки. То есть, время, потраченное на поиск и покупку товара, человек может использовать более продуктивно, например, работать и получать за это деньги.

4. Будем считать, что потребитель совершает покупку только в случае, если его полезность при этом больше нуля.

5. Будем считать, что у данного товара есть только два аналога: один – широко рекламируемый, другой – нет. В реальной жизни во многих случаях у товара может быть больше аналогов, но всегда можно выделить из всего множества продуктов двух наиболее опасных конкурентов с точки зрения нашей фирмы.

Список обозначений

Введем следующие обозначения:

Обозначение	**Описание**
Для фирмы	
p	Цена товара, продаваемого данной фирмой, если отказаться от его продвижения на рынок
β	Добавка к цене p, если товар продвигается на рынок
$\tilde{P}$	$p + \beta$. Это окончательная цена продвигаемого товара
X	Количество продаваемого товара
A_1	Затраты на продвижение товара
A_2	Затраты на развитие сбытовой сети в

Обозначение	Описание
	случае отказа от продвижения товара
c	Издержки на изготовление одной единицы товара (переменные издержки)
F	прочие постоянные затраты
Рн	Цена аналогичного "нерекламируемого" товара (выпускаемого фирмой –конкурентом)
Pp	Цена аналогичного "рекламируемого" товара (выпускаемого фирмой – конкурентом)
Для потребителя	
$p^{\#}$	Цена безразличия
M	Максимальная добавка к цене, которую согласен заплатить потребитель, если товар рекламируется
t	Время, затрачиваемое на поиск и покупку товара (в часах)
W	Цена одного часа потребителя (если бы он не тратил время на покупку товара, а работал в это время или отдыхал)
N	Количество товара, которое хочет купить потребитель

Построение модели

Анализ игры будем проводить методом обратной индукции. Поэтому рассмотрение начнем с анализа поведения потребителя. Будем считать, что если потребитель не покупает товар, то его полезность будет равна нулю (он ничего не приобретает, но и ничего не тратит). Соответственно, $u_4 = u_8 = 0$.

Так как считаем, что у данного продукта есть только два аналога, то $u_2 = u_6$ и $u_3 = u_7$. Нас будет интересовать случай, когда потребителю выгодно покупать продвигаемый товар данной фирмы. То есть, когда

$$u_1 > u_2,\ u_1 > u_3,\ u_1 > u_5 \text{ и } u_1 > 0. \tag{1}$$

Получим выражения для функций полезности.

$$u_1 = (p^{\#} + M - p - \beta)*N - t_1W \tag{2}$$

$$u_2 = (p^{\#} + M_P - P_P)*N - t_PW \tag{3}$$

$$u_3 = (p^{\#} - P_H)*N - t_HW \tag{4}$$

$$u_5 = (p^{\#} - p)*N - t_2W \tag{5}$$

Условие (1) верно, если одновременно выполнены два неравенства:

$$M > \beta + \frac{(t_1 - t_2)W}{N} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{P} < \min\Bigg[&(M - M_p) + P_p + \frac{(t_P - t_1)W}{N}, \\ &M + P_H + \frac{(t_H - t_1)W}{N},\ p^{\#} + M - \frac{t_1W}{N} \Bigg]. \end{aligned} \tag{7}$$

Можно доказать, что минимумом из трех выражений в правой части (7) является: $(M - M_p) + P_p + \dfrac{(t_P - t_1)W}{N}$.

Следовательно, (7) перепишем в виде:

$$\tilde{P} < (M - M_p) + P_p + \frac{(t_P - t_1)W}{N} \tag{8}$$

То есть для того, чтобы потребителю было выгодно покупать рекламируемый товар данной фирмы требуется одновременное выполнение условий (6) и (8).

Рассмотрим теперь поведение фирмы. Выражения для прибыли фирмы:

$$\pi_1 = (p + \beta - c)x - F - A_1 \tag{9}$$

$$\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = -cx - F - A_1 < 0 \tag{10}$$

$$\pi_5 = (p - c)x - F - A_2 \tag{11}$$

$$\pi_6 = \pi_7 = \pi_8 = -cx - F - A_2 < 0 \tag{12}$$

Получим, теперь условия, когда фирме выгодно продвигать свой товар. Очевидно, что для этого должно выполняться:

$$\pi_1 > \pi_5 \quad и \quad \pi_1 > 0. \tag{13}$$

Это произойдет при одновременном выполнении следующих неравенств:

$$\beta > \frac{A_1 - A_2}{x} \tag{14}$$

$$\tilde{P} > c + \frac{A_1 + F}{x} \tag{15}$$

В результате получаем условия, при верности которых и фирме и потребителю было выгодно продвижение товара (для этого объединяем неравенства (6), (8), (14) и (15)):

$$\begin{cases} c+\dfrac{A_1+F}{x}<\widetilde{P}<(M-M_p)+P_p+\dfrac{(t_P-t_1)W}{N} & (16) \\ M>\beta+\dfrac{(t_1-t_2)W}{N} & (6) \\ \beta>\dfrac{A_1-A_2}{x} & (14) \end{cases}$$

Аналогично выводится система уравнений для случая, когда ни фирме, ни потребителю не выгодно продвижение товара. В результате получим:

$$\begin{cases} c+\dfrac{A_2+F}{x}<P<-M_p+P_p+\dfrac{(t_P-t_2)W}{N} & (17) \\ M<\beta+\dfrac{(t_1-t_2)W}{N} & (18) \\ \beta<\dfrac{A_1-A_2}{x} & (19) \end{cases}$$

напомним, что p – цена товара данной фирмы в случае отказа от рекламы.

Анализ полученных уравнений

4.4.1. Продвижение товара

Рассмотрим систему неравенств, выполнение которой необходимо, чтобы и потребителю и фирме было выгодно продвижение товара (см. (16), (6), (14)).

Следует отметить, что при выполнении неравенств (16), (6), (14) решение будет парето-эффективным и равновесным по Нэшу. Если (6) нарушается, то все равно решение является парето-эффективным и равновесным по Нэшу, но это равновесие неустойчиво, в силу того, что потребителю при первой же возможности выгодно от него отклонится.

Рассмотрим уравнение:

$$c + \frac{A_1 + F}{x} < \tilde{P} < (M - M_p) + P_p + \frac{(t_P - t_1)W}{N}$$

(будем предполагать, что условия (6) и (14) выполняются).

Фирма, решающая продвигать или нет ей свой товар может извлечь из него достаточно много информации. Деньги, отведенные на продвижение товара, компания может расходовать в двух направлениях. Во–первых, **на рубричную рекламу**, в которой будет указываться, что это за товар, где его купить, за какую цену. В то же время необходимо **развивать сбытовую сеть** – делать товар ближе к людям. Эти действия позволяют уменьшить время, затрачиваемое на совершение покупки t_1. Это ведет при прочих равных к возрастанию слагаемого $\frac{(t_P - t_1)W}{N}$, а следовательно и цены, которую потребитель будет согласен заплатить за товар. Во-вторых, компания может расходовать деньги **на имиджевую рекламу** (к такой рекламе отнесем престижную рекламу, рекламу марки и разъяснительно – пропагандистскую рекламу. Необходимо убедить потребителя, что продукция, производимая данной компанией уникальна, что она по своим характеристикам значительно опережает конкурентов, позволяет достигнуть новое качество в потреблении. Это ведет к увеличению разницы M-M_P, а следовательно и возможной цены товара.

Пусть фирма хочет вывести на рынок свой новый товар. Она может провести маркетинговое исследование с целью выяснить какую сумму готовы заплатить потребители за продукт (таким образом фирма узнает примерное значение M). Кроме того, компании необходимо решить:

1. на потребителей какого уровня доходов она будет ориентироваться при продаже товара (определяется среднее значение W).
2. будет она торговать оптом или в розницу (определяется среднее значение N)

Далее зная свои финансовые возможности, фирма оценивает какое время совершения покупки по сравнению с конкурентами она сможет обеспечить.

После этого компания в состоянии определить вклад каждой из компонент в цену товара. Логично предположить, что при определении доли в рекламном бюджете имиджевой рекламы и средств на развитие сбытовой сети следует руководствоваться вкладом соответствующей компоненты в цену товара. Таким образом, выражение (16) помогает фирме распределить рекламный бюджет, используя простейший математический аппарат.

Но необходимо отметить, что продвигать товар на рынок смогут не все компании, так как для это необходимо постоянно тратить большие суммы денег на развитие товара. А кроме того, технология производства должна позволять производить продукт высокого качества. Но тут возникает дилемма: с одной стороны постоянно обновляя и изменяя продукт фирма увеличивает его привлекательность, но с другой стороны увеличиваются (или не уменьшаются) издержки компании. Поэтому, перед принятием решения о продвижении товара, предприятие должно реально оценить свои финансовые возможности, особенно, если оно выходит на рынок впервые, и ему еще только предстоит завоевать репутацию у потребителей.

Выясним теперь факторы, влияющие на преимущественное использование того или иного вида рекламы.

В результате анализа уравнения (16) получим, что:

1. Имиджевая реклама преимущественно используется, если фирма:
    1. занимается оптовой торговлей
    2. продает товары длительного пользования
    3. продает нормальные престижные товары
2. Первоочередное развитие сбытовой сети выгодно в случаях, если фирма:
    1. рассчитывает на потребители с достаточно высокими доходами
    2. занимается розничной торговлей
    3. продает товары повседневного спроса
    4. продает нормальные непрестижные товары
    5. работает на высококонкурентном рынке

4.4.2. Отказ от продвижения товара

При отказе от продвижения товара фирма может только как можно активнее развивать сбытовую сеть (см. неравенства (17), (18), (19))

Как видно из неравенства (17), при заданной технологии фирме в первую очередь надо как можно активнее развивать сбытовую сеть, чтобы проще говоря, товар можно было купить на любом углу. Это приведет при прочих равных к увеличению величины $\dfrac{(t_P - t_2)W}{N}$

Кроме того, необходимо отметить, что разумнее организовать предприятие розничной торговли, так как в этом случае факт развитой сбытовой сети, решающим образом повлияет на выбор потребителя.

Как следует из вышесказанного, при отказе от продвижения товара, главное внимание следует обратить на быстроту совершения покупки

В некоторых случаях потребителю важны лишь минимально необходимые свойства товара и он хочет совершить покупку по наименьшей возможной цене. Марка же продукта для него абсолютно безразлична.

Приведем два примера.

1. Потребителю важно долететь из пункта А в пункт Б. Его не волнует уровень сервиса и авиакомпания.
2. Потребитель хочет купить электрочайник, который кипятит воду в приемлемое время. Совершенно неважно при этом, например, отключается он автоматически при закипании воды или нет.

Примеры можно продолжать до бесконечности.

Перечислим случаи, когда выгодно использовать механизм назначения цен покупателем:

1. Очевидно, что наиболее перспективным видом товаров, при продаже которых можно отказаться от их продвижения, являются товары повседневного спроса.
2. Выгодно бывает отказаться от продвижения товара и в случае высококонкурентного рынка. Компания ограничена в средствах для того, чтобы сделать свой товар уникальным и продолжать постоянно развивать его.
3. Принципиально другая ситуация складывается в случае, если у фирмы нет средств для продвижения товара. Ведь помимо рекламы, для этого необходимо постоянно

развивать продукт, иметь современную технологию и т.п.

4. В ряде случаев и компания была бы рада продать товар по более дешевой цене, но не может этого сделать. Например, рассмотрим авиакомпанию. Пусть она у нее очень хорошая репутация на рынке и достаточно дорогие билеты. Почти всегда у любой авиакомпании есть невостребованные места, продав их по более низкой цене фирмы бы уменьшила свои убытки. Но она не может этого сделать из-за боязни уронить свой имидж в глазах остальных клиентов. В подобных случаях, незаменимой оказывается Интерент-торговля в случае назначения цены покупателем (необходимо напомнить, что при этом потребитель не может выбирать марку товара)

4.5. Модификация модели для случая Интернет-торговли

Интернет позволяет совершить покупку с максимальной быстротой.

Изменим немного смысл величины W. Теперь она будет равна складываться из денежной оценки одного часа своего временем пользователем и стоимости одного часа работы в Интернет. Кроме того, естественно появятся издержки на поддержание сайта (или, если фирма работает с Интернет через посредника, то необходимо будет ему платить). Включим эти затраты в постоянные издержки. Но стоит отметить, что эти дополнительные затраты по сравнению с основными достаточно малы.

Использование Интернет для продажи товара позволяет сократить затраты фирмы (например, практически исчезают затраты на развитие сбытовой сети)

Если фирма решает продвигать товар, то практически все деньги на это выделенные, она будет тратить на имиджевую рекламу. Здесь очень важно работать с качественными товарами, во-первых, это позволит сократить издержки, а, во-вторых, привлечет новых покупателей. В дальнейшем хорошая репутация фирмы сделает возможным использование премиального ценообразования. Кроме того, если компания будет продавать свой товар только через Интернет, то это позволит значительно снизить ее постоянные затраты. Все это приводит к тому, что фирма для завоевания большей доли рынка сможет несколько снизить цены по сравнению с конкурентами.

Кроме того, в случае если конкуренты фирмы не используют Интернет, то наша компания получает дополнительное конкурентное преимущество. Так как ее продукт можно купить значительно быстрее, чем у конкурента. естественно, что это понравится потребителям.

5. Заключение

Торговля через Интернет позволяет значительно сократить издержки предприятия (например, практически исчезают расходы на развитие сбытовой сети, уменьшаются постоянные затраты). Это позволит заняться бизнесом людей с не очень большими финансовыми возможностями. Кроме того, в Интернет постоянно генерируются новые бизнес-модели. За одной из них (идеей назначения цены покупки потребителем при невозможности указания марки товара) большое будущее. Она выгодна как крупным компаниям, имеющим хорошую репутацию на рынке, так и небольшим малоизвестным фирмам. Потребители же, совершая покупки через Интернет, значительно экономят свое время, а значит и деньги.

В заключение надо подчеркнуть, что в настоящее время практически все аналитики предсказывают И-торговле большое будущее.

БИБЛИОГРАФИЯ:

1. *Липсиц И.В.* Коммерческое ценообразование. – М.: БЕК, 1997.
2. *Котлер Ф.* Основы маркетинга. – М.: Прогресс, 1990.
3. *Скабичевский Л.* Сеть, которая накрыла Россию // Коммерсант. – 1999. – №208.
4. *Леви С.* Виртуальная торговля. Сетевые магазины – колыбель новых способов "шоппинга" // Итоги. – 1999. – №38.
5. *Гагин А.* И-бизнес // Итоги. – 1999. – №47.