**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова**

Экономический факультет

Альманах

# Экономические исследования молодых ученых № 3

Совет молодых ученых
экономического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова

**Основан в сентябре 1999 г.**





ISBN 5-7218-0454-8

**Адрес редакции:**
119992, Москва, Ленинские горы, ГСП-2, экономический факультет МГУ, СМУ, к. 513

Тел.: 7 (095) 939-18-65
Факс: 7 (095) 939-08-77
http://www.econ.msu.ru/smu
e-mail: smu@econ.msu.ru

# СОДЕРЖАНИЕ



# CONTENT



Лицензия ИД № 04386 от 26.03.2001 г.
Подписано в печать 20.12.2005 г. Формат 60х88/8
Печать офсетная. Печ. л. 12,0. Тираж 100 экз. Зак. 851.
ООО «ТЕИС»

115407, Москва, Судостроительная ул., 59
Отпечатано с готовых диапозитивов в филиале
Государственного ордена Октябрьской Революции
Ордена Трудового Красного Знамени Московского
предприятия «Первая Образцовая типография»
Министерства Российской Федерации по делам печати,
теле-радиовещания и средств массовых коммуникаций
115114, Москва, Шлюзовая наб., 10

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ, ВОЛНОВЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ПОВЕДЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА[1]

**Дернов Александр Владимирович, Магницкий Николай Александрович, Сидоренко Владимир Николаевич**

***Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия***

e-mail*: vladimir@econ.msu.ru*



Разработана хаотическая модель рыночной экономики диффузионного типа, описывающая динамику совокупного капитала (производительного, товарного и денежного), совокупного спроса и нормы прибыли в пространстве технологий. Проанализированы основные режимы поведения данной системы. Выделены новые ранее неизвестные режимы перехода к хаосу. Проведено обобщение данной модели на случай множества регионов. Проведена качественная и частично количественная верификация полученных моделей.

# PERIODICAL, WAVE AND CHAOTIC BEHAVIOUR MODELS OF THE DIFFUSION TYPE ECONOMIC SYSTEMS

**Dernov Alexandr, Magnitski Nikolay, Sidorenko Vladimir**

***Moscow State 'Lomonosov' University, Russia***

e-mail*: vladimir@econ.msu.ru*

The chaotic model of market economy of the diffusion type is developed for describing dynamics of the cumulative capital (productive, commodity and monetary), cumulative demand and rate of return in space of technologies. The basic modes of behaviour of the system were analysed. New unknown modes of transition to chaos are discovered. Generalization of the model on a case of some regions is carried out. Quantitative and partly qualitative verification of the received models is done.

## Введение

К настоящему моменту накоплено достаточно экспериментально-статистических фактов [1], позволяющих рассматривать кривые эволюции различных экономических показателей как траектории нелинейных динамических систем с регулярным или хаотическим аттрактором. Некоторые результаты моделирования экономических систем в виде автономных систем нелинейных дифференциальных уравнений описаны в работах [2], [3]. Все известные модели, как правило, представляют собой конечномерные макроэкономические системы. Большинство попыток пространственно-временного моделирования [2] связано с географическим распределением и взаимодействием экономически активных объектов (населения, предприятий и т.д.). Н.А. Магницким в работе [4] предложен подход, в рамках которого вводится особое технологическое пространство, в котором строится модель типа "реакция-диффузия", имеющая, однако, некоторые отличия от моделей, возникающих в естественно-научных областях. Оказалось, что данная модель представляет собой сложный математический объект, обладающий принципиально новыми свойствами и требующий новых методов анализа. В рамках данной модели были исследованы явления, описанные далее в этой статье.

## 1. Описание модели экономики диффузионного типа

В модели рассматривается замкнутая экономическая система, процесс развития которой происходит в конечномерном евклидовом пространстве $R_n$, называемом пространством технологий. Каждая точка с пространства $R_n$ соответствует определенной техноло-

[1] Исследование проведено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта №03-02-00057а.

гии производства некоторого продукта и имеет своими координатами затраты $c_i$ ресурса $i$ на единицу выпускаемого продукта ($i$=1,2,...,$n$). При $n$ = 1 используется единственный универсальный ресурс — деньги. Предполагается наличие на рынке трех экономических субъектов, имеющих разные экономические интересы: предпринимателей, наемных рабочих и государства. Саморазвитие рыночной экономики, таким образом, осуществляется за счет движения и самовозрастания капитала предпринимателей, которое происходит под управлением и контролем государства в процессе кругооборота капитала.

Рассматривая подробно процесс кругооборота капитала, придем к следующим уравнениям, описывающим развитие рыночной экономики [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(t,c)}{\partial t} = -div(\kappa_1(c,x,z)grad(z)) + bx((1-\sigma)z - \delta y) \\ \dfrac{\partial y(t,c)}{\partial t} = -div(\kappa_2(c,x,z)grad(z)) + x(1-(1-\delta)y + \sigma z) \\ \dfrac{\partial z(t,c)}{\partial t} = a(y - dx) \end{cases} \tag{1}$$

где $x = \beta\theta/(1+\theta+\eta)$ – нормированная плотность суммарного капитала (производительного, товарного и денежного), задействованного предпринимателями в момент $t$ при производстве по технологии $c$ некоторой продукции; $y = \beta\eta(1+\gamma)/(\omega\theta)$ – нормированная плотность совокупного спроса предпринимателей, наемных работников и государства на произведенную по технологии $c$ продукцию; $z = (1+\gamma)\pi/\omega$ – нормированная плотность распределения нормы прибыли в момент $t$ в пространстве технологий, $a = \alpha\theta/(\beta\eta)$, $b = \omega\theta/(1+\theta+\eta)(1+\gamma)$, $d = (\theta+(\eta-1)(1+\gamma)/(\omega\theta)$ – коэффициенты, характеризующие строение суммарного капитала и структуру рынка; $\kappa_1, \kappa_2$ – коэффициенты диффузии капитала и спроса в пространстве технологий; $\delta$ – доля прибыли, идущая (через налоги и сборы) на государственное потребление; $\sigma$ — доля прибыли, идущая на частное потребление, $\omega$ – доля переменного капитала, выплачиваемая предпринимателями в единицу времени в виде зарплаты наемным работникам.

Положительный коэффициент $\alpha$ характеризует силу связи изменения нормы прибыли в зависимости от превышения платежеспособного спроса над капиталом, а положительный коэффициент $\beta$ соответственно характеризует потребление в зависимости от платежеспособного спроса и количества имеющихся товаров и услуг. (При этом $\theta = C_T/M$ – отношение суммарных издержек (труда и капитала) к денежной массе, $\eta = Y/M$ – отношение товарных запасов к денежной массе, $\gamma = K/H$ – соотношение капитала и труда, $\pi$ – норма прибыли. Остальные параметры представляют собой некоторые неотрицательные константы. Предполагая, что в экономической системе отсутствует поток капитала и спроса за пределы рассматриваемой системы, получаем граничные условия второго рода в виде $\partial x(t,0)/\partial c = \partial x(t,l) = 0$, $\partial y(t,0)/\partial c = \partial y(t,l) = 0$ $\partial z(t,0)/\partial c = \partial z(t,l) = 0$, что приводит систему (1) к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(t,c)}{\partial t} = -\kappa_1 \dfrac{\partial^2 z(t,c)}{\partial t^2} + bx((1-\sigma)z - \delta y) \\ \dfrac{\partial y(t,c)}{\partial t} = -\kappa_2 \dfrac{\partial^2 z(t,c)}{\partial t^2} + x(1-(1-\delta)y + \sigma z) \\ \dfrac{\partial z(t,c)}{\partial t} = a(y - xd) \end{cases} \tag{2}$$

При отсутствии диффузии спроса ($\kappa_2 = 0$) в пространстве технологий система (2) сводится к виду, далее обозначаемому как (2а).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(t,c)}{\partial t} = -\kappa_1 \dfrac{\partial^2 z(t,c)}{\partial t^2} + bx((1-\sigma)z - \delta y) \\ \dfrac{\partial y(t,c)}{\partial t} = x(1-(1-\delta)y + \sigma z) \\ \dfrac{\partial z(t,c)}{\partial t} = a(y - dx) \end{cases} \quad (2a)$$

При отсутствии диффузии капитала ( $\kappa_1 = 0$ ) и спроса ( $\kappa_2 = 0$ ) в пространстве технологий система (2) после интегрирования по пространству технологий сводится к следующему сосредоточенному виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = bx((1-\sigma)z - \delta y) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = x(1-(1-\delta)y + \sigma z) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = \alpha(y - xd) \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) является первой системой, решения которой, с одной стороны, имеют циклы любого периода и хаотический аттрактор, а с другой — наглядную экономическую интерпретацию.

## 2. Основные сценарии поведения в модели экономики диффузионного типа

Фиксируем параметры $a$, $b$ и рассмотрим несколько наиболее интересных сценариев поведения решений системы (3) при изменении наиболее существенных для организации экономического процесса параметров $\delta$ и $\sigma$.

**Сценарий 1 – командно-административная экономика:** $\sigma < 0$. Этот сценарий соответствует государству с чрезвычайно сильной командно-административной системой управления экономикой, когда государственные органы заставляют предпринимателей всю полученную ими прибыль отдавать государству. Если «давление» государства на бизнес велико ($\delta > \delta^* = 0{,}681$), то такая экономика может существовать некоторое время с низкими уровнями капитализации и потребления, а затем разрушается путем уменьшения до нуля платежеспособного спроса населения. При уменьшении "давления" государства на бизнес командно-административная экономика может существовать в практически стационарном (по существу, застойном) состоянии (рис.1) с низким уровнем капитализации и потребления, не разрушаясь при этом длительное время (система (3) имеет устойчивую неподвижную точку).

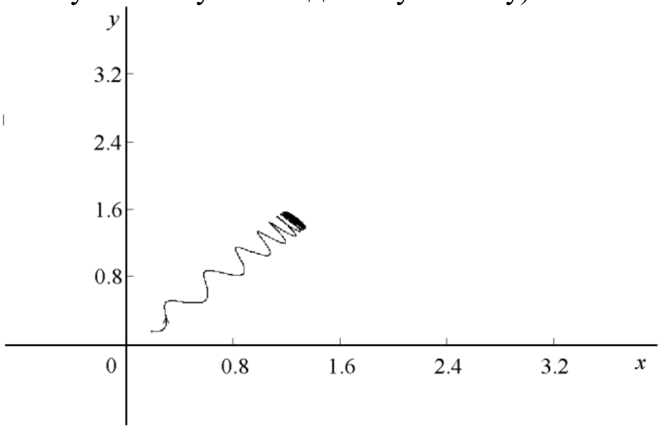


**Рис. 1. Проекция на плоскость ($x$,$y$) фазового портрета системы (3) при $\delta$ = 0,65 и $\sigma$ = -1**

**Сценарий 2 – рыночная экономика:** $\delta < \delta^*$, $\sigma$ растет. Переход параметра $\sigma$ через границу $\sigma$ = 0 характеризует переход от экономики с административно-командным стилем управления к экономике рыночного типа. При $\sigma > 0$ появляется относительно независимый от государства класс предпринимателей, которые могут позволить себе тратить полученную ими прибыль по своему усмотрению, в том числе и на личное потребление. Развитие такой экономики в рассматриваемом случае $\delta < \delta^*$ может происходить исключительно циклическим образом. При этом сложность периодических колебаний капитала и платежеспособного спроса возрастает с увеличением $\sigma$ (при фиксированном $\delta$) вплоть до появления циклов любого периода и хаотических колебаний, а при фиксированном значении $\sigma$ с ростом величины параметра $\delta$ вид колебаний становится более простым. Примечательным является тот факт, что при каждом значении $\delta$ всегда найдется значение $\sigma$ такое, что экономика со временем разрушается в результате глобального кризиса, сопровождающегося уменьшением вплоть до нуля и капитала, и платежеспособного спроса населения. При значении $\delta$ = 0,65 с ростом $\sigma$ в модели (3) реализуется субгармонический каскад бифуркаций перехода к хаосу. Так при $\sigma$ =0,266 возникает цикл удвоенного периода (рис. 2), при $\sigma$ = 0,275 - цикл учетверенного периода (рис. 3), при $\sigma$ = 0,278 – хаотический аттрактор – аттрактор Фейгенбаума, завершающий бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода (рис. 4).

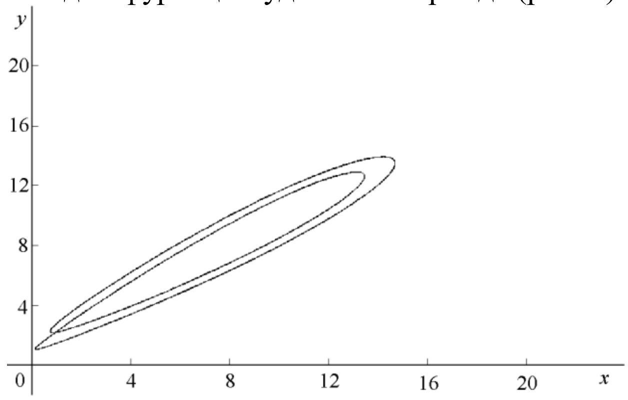


**Рис. 2. Проекция на плоскость (*x*,*y*) цикла удвоенного периода $\delta$ = 0,65 и $\sigma$ = 0,266.**

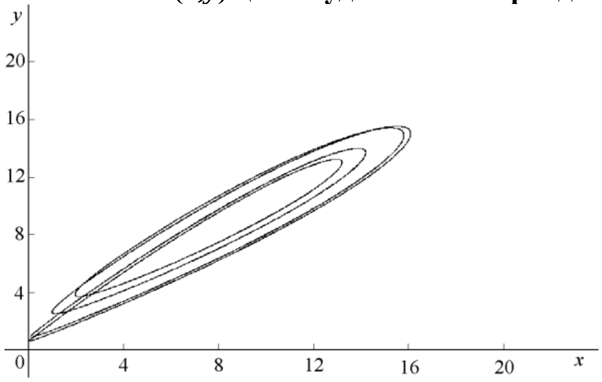


**Рис. 3. Проекция на плоскость (*x*,*y*) цикла периода четыре при $\delta$ = 0,65 и $\sigma$ = 0,276**

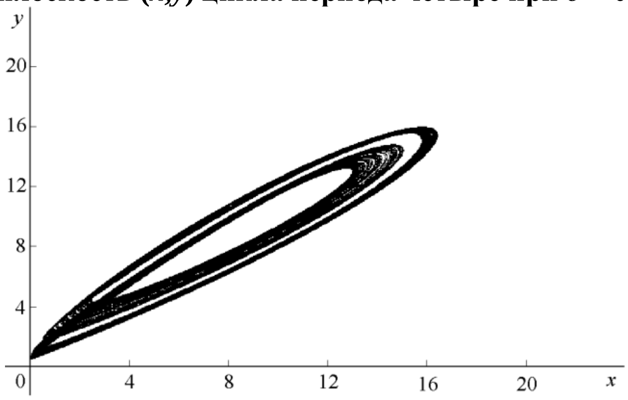


**Рис. 4. Проекция на плоскость (*x*,*y*) хаотического аттрактора – аттрактора Фейгенбаума при $\delta$ = 0,65 и $\sigma$ = 0,278**

При значении $\sigma$ = 0,2802 возникает цикл периода 5, за ним следует очередной каскад бифуркаций удвоения периода, после чего при значении $\sigma$ = 0,284 рождается символический цикл периода 3 (рис. 5), наличие которого свидетельствует, согласно теореме Шарковского, о существовании в системе (3) циклов любого периода любой кратности. При значениях $\sigma$ > 0,284 отмечается разрушение циклического поведения экономической системы и ее распад.

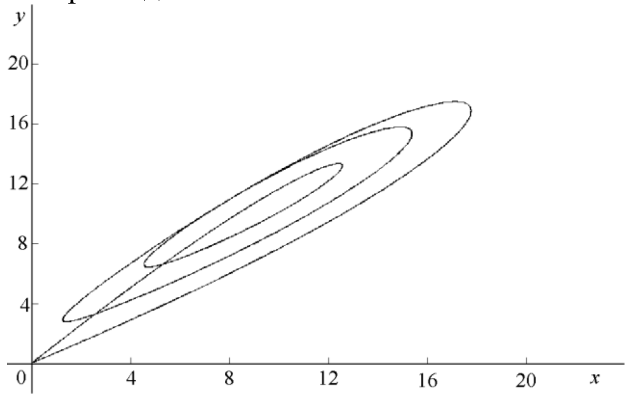


**Рис. 5. Проекция на плоскость (*x*,*y*) цикла периода три при $\delta$ = 0,65 и $\sigma$ = 0,284**

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что неконтролируемый рост личного потребления предпринимателей, которому в модели (2а-3) соответствует увеличение параметра $\sigma$, неминуемо ведет к хаосу в экономике и в конечном итоге к ее разрушению. Наглядной иллюстрацией к полученным строгим математическим результатам являются, с одной стороны, тяжелые последствия десятилетнего периода «дикого» капитализма в России вследствие недостаточно продуманных реформ, с другой стороны — успехи экономики Китая, где рыночные отношения в тот же период развивались под контролем и управлением государства.

**Сценарий 3 — смешанная экономика**: σ > 0, δ растет. Как уже было отмечено выше, при фиксированном значении σ сложность периодических колебаний капитала и платежеспособного спроса убывает с ростом величины параметра δ и возрастает при ее уменьшении. Поэтому при малых значениях δ экономика также разрушается, как и при больших значениях σ. При увеличении значений параметра δ режимы функционирования экономики упрощаются. Например, при значении δ = 0,662 решением системы (3) является простой устойчивый предельный цикл, а при δ > δ* этот предельный цикл стягивается в устойчивую неподвижную точку (рис. 6). Последний сценарий позволяет сделать второй важный вывод о том, что более высокий платежеспособный спрос государства на потребительские товары обеспечивает и более устойчивое развитие рыночной экономики, ее меньшую подверженность различным кризисным явлениям. Напротив, малый платежеспособный спрос государства разрушает экономическую систему. Этот же вывод относится и к платежеспособному спросу трудящихся, который определяется их заработной платой.

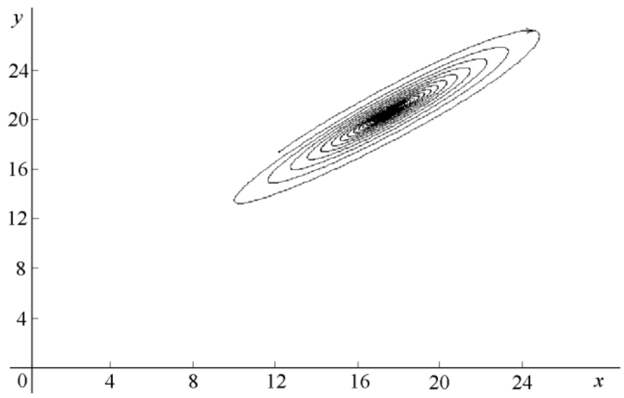


**Рис. 6. Проекция на плоскость (*x*,*y*) решения системы (3) при $\delta = \delta^*$ = 0,681, $\sigma$ = 0,284**

Анализ устойчивости решений системы (2) при наличии диффузии капитала и спроса показывает, что инерционность, "неповоротливость" капитала по сравнению с платежеспособным спросом (в случае $\kappa_1 \ll \kappa_2$) приводят к неустойчивости экономической системы и к ее разрушению при любых значениях $\delta$ и $\sigma$. Другими словами, справедлив третий важный вывод о том, что капитал должен не только находиться в постоянном движении, но еще и достаточно быстро реагировать на все изменения платежеспособного спроса на различные потребительские товары, производимые экономической системой.

### 3. Дополнительные сценарии поведения в модели экономики диффузионного типа

**Сценарий 4 — пространственно-однородные циклы и недиффузионный хаос**. Наряду с существованием простого устойчивого цикла в системе (3) при некоторых значениях параметров может иметь в качестве аттракторов более сложные циклы, а также каскад удвоений Фейгенбаума с образованием хаотического аттрактора. Причем, как известно [6], [7], при бифуркациях удвоения периода, имеющих место в каскаде удвоений Фейгенбаума, устойчивые циклы не исчезают, а просто теряют устойчивость и какое-то время продолжают существовать, иногда внутри хаотического аттрактора. Очевидно, что всем перечисленным решениям сосредоточенной системы (3) будут соответствовать пространственно-однородные решения в распределенной системе (1). Таким образом, в распределенной системе (1) будет присутствовать и другой вид хаоса, который будем называть недиффузионным.

Рассмотрим сначала существование пространственно-однородных решений без обсуждения вопроса об их устойчивости. Если пространственно-однородное решение соответствует устойчивому циклу системы (3), то вопрос о существовании и нахождении с любой точностью соответствующего пространственно-однородного решения системы (1) не вызывает сложностей. Поэтому рассмотрим случай, соответствующий неустойчивым циклам системы (3). Для поиска и стабилизации неустойчивых предельных циклов в нелинейных динамических системах было предложено несколько различных методов [8], [9], [10], получивших название методов управления хаосом. Название оправдано тем, что предлагается стабилизировать не априори заданные циклы, а неустойчивые циклы, вид которых неизвестен, которые могут существовать при наличии в системе хаоса. Для данной системы предлагается воспользоваться методом, апробированным ранее на системах Лоренца и Чуа [11].

В ходе проведенного авторами исследования было доказано, что если $u_0(t,\delta)$ - предельный цикл системы (2), где $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$, а $\delta^*$ – критическое значение параметра $\delta$, такое что при $\delta > \delta^*$ цикл $u_0(t,\delta)$ устойчив, а при $\delta \le \delta^*$ – неустойчив (т.е. претерпевает бифуркацию удвоения периода), то существует такое $\delta_1 < \delta^*$, что неустойчивый цикл $u_0(t,\delta)$ может быть локализован в фазовом пространстве с любой степенью точности.

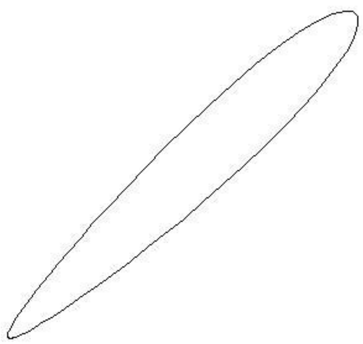

**Рис. 7. Простой цикл, стабилизированный при *δ* = 0,651, потерявший устойчивость при *δ* = 0,665**

На рис. 7 и 8 показаны циклы одинарного и двойного периодов, стабилизированные при значении $\delta = 0,651$, когда система (3) имеет хаотический аттрактор Фейгенбаума, показанный на рис. 4. При этом остальные параметры системы имеют значения $a = 7,\ b = 0,4,\ d = 1,17,\ \sigma = 0,284$.

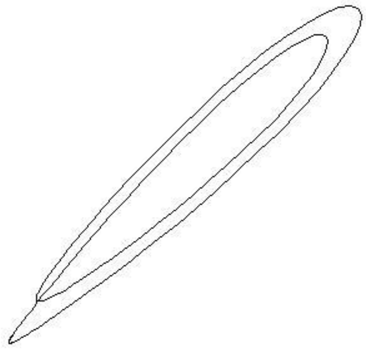

**Рис. 8. Цикл удвоенного периода, стабилизированный при *δ* = 0,651, потерявший устойчивость при *δ* = 0,658**

Следующей задачей является изучение устойчивости найденных пространственно-однородных решений в распределенной системе (1) с граничными условиями второго рода. Этот вопрос был исследован для системы в виде (2а). Численный эксперимент показал, что пространственно-однородные решения, соответствующие найденным неустойчивым циклам системы (3) нельзя сделать устойчивыми ни при каких положительных значениях коэффициента диффузии капитала $\kappa_1$. Если же соответствующий цикл системы (3) является устойчивым, то при достаточно больших значениях диффузии капитала соответствующий пространственно-однородный цикл является также устойчивым, а при уменьшении значения $\kappa_1$ ниже некоторого критического значения цикл теряет свою устойчивость.

Отсюда вытекает, что возможен еще один сценарий возникновения пространственно-временного хаоса, отличный от сценариев, рассмотренных авторами в предыдущих работах [15]. Так, при малой длине области система (1) может иметь пространственно-однородный аттрактор Фейгенбаума. Далее, при постепенном увеличении длины области пространственная устойчивость нарушается и хаотический аттрактор становится пространственно-неоднородным, что соответствует пространственно-временному хаосу.

**Сценарий 5 — пространственно-неоднородные циклы.** Для экономической системы (2а) и недиагональной матрицей диффузии *D*, получаемой из записи уравнения (2а) в матричном виде $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(u),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$, где $u = (x, y, z)$ – вектор-столбец из независимых переменных, $\Delta u = (\partial^2 x / \partial t^2, \partial^2 y / \partial t^2, \partial^2 z / \partial t^2)$, $F(u)$ – вектор-столбец из слагаемых без производных, входящих в правую часть уравнений (2а), $n$ – нормаль к границе области интегрирования системы (2а) $\Omega$, бифуркационная кривая потери устойчивости пространственно-однородного цикла в пространстве параметров $(\delta, \kappa = \kappa_1)$ была численно найдена в работе [13] (рис. 10).

Авторами было доказано, что рассматривая систему (2а) при фиксированном значении $\delta < \delta^*$, таком что в сосредоточенной системе (3) существует простой устойчивый цикл $u_0(t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ периода *T*, можно указать такое значение коэффициента диффузии $\kappa^*(\delta)$, что при $\kappa < \kappa^*$ система (2а) имеет пространственно-однородный устойчивый цикл $u(t,c) = u_0(t)$, а при переходе коэффициента $\kappa$ в область значений $\kappa^* > \kappa$ в системе (2а) происходит потеря устойчивости этого пространственно-однородного цикла и в окрестности него рождается пара пространственно-неоднородных устойчивых периодических структур вида $u(t,c)=u_0(t)\pm\sqrt{\kappa-\kappa^*}a_0(t)\cos(c)+o(\kappa-\kappa^*)$, где $a_0(t)$ – некоторая $T$–периодичная вектор-функция, не зависящая от $\kappa-\kappa^*$.

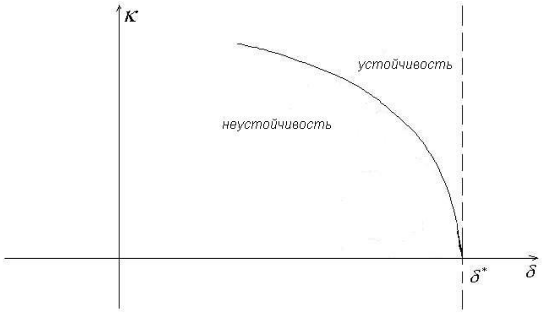


**Рис. 10. Потеря устойчивости пространственно-однородного цикла в системе (2а)**

Отметим, что данное явление ранее [14] было обнаружено для некоторых классических систем реакции-диффузии с диагональной матрицей $D$, возникающих в задачах биологии; в работе [15] было численно показано, что в модели брюсселятора именно с такой бифуркации начинается пространственно-временная хаотизация при увеличении длины области.

**Сценарий 6 — волновые эффекты в распределенной системе.** Для исследования волновых эффектов в системе (1) был использован принцип подчинения Хакена, фактически впервые полученный в [16], а полностью сформулированный и обоснованный в [17], [18]. Данный принцип является основополагающим принципом, использующимся при редукции конечномерных задач. Его суть заключается в том, чтобы выделить в исходной системе иерархию параметров порядка. Эта иерархия означает группировку переменных по скорости изменения во времени и выделение групп более медленных или быстрых по отношению к другим группам переменных. Таким образом, в заданном временном порядке система может иметь значительно меньшую размерность, равную числу переменных в соответствующем уровне иерархии. Более медленные переменные при таком подходе считаются константами, а более быстрые считаются мгновенно подстраивающимися под данные и выражаются через них алгебраически. Данный принцип был применен к бесконечномерным задачам, описываемым уравнениями в частных производных.

Численный анализ одномерной задачи (1) на отрезке, выполненный в работе [19], показал, что в системе возникают решения, имеющие вид бегущих волн, которые существуют достаточно продолжительное время (см. рис. 11 а-е). При более внимательном исследовании полученных результатов было замечено, что переменные системы (1) имеют разный пространственно-временной порядок изменения.

Если рассмотреть интегральные характеристики

$$X(t)=\int_0^l x(t,c)dc,\; Y(t)=\int_0^l y(t,c)dc,\; Z(t)=\int_0^l z(t,c)dc,$$

то траектория $(X(t),Y(t),Z(t))$ будет совершать колебания около положения равновесия, причем, при некоторых значениях параметров пространственные неоднородности со временем исчезают и система со временем выходит на режим трехмерных пространственно-однородных колебаний [5], [19]. Ранее было доказано существование пространственно-однородного устойчивого цикла. Пусть теперь нас интересует пространственно-временное поведение, а именно то, что происходит с системой, прежде чем она выйдет на вышеописанный режим пространствено-однородных колебаний. Оказывается, что переменная $y(t,c)$ в каждой точке $c$ меняется со скоростью порядка скорости изменения переменных $(X(t),Y(t),Z(t))$, при этом переменные $x(t,c)$ и $z(t,c)$

имеют более быстрый порядок изменения. Для большей простоты будем рассматривать систему (2а).

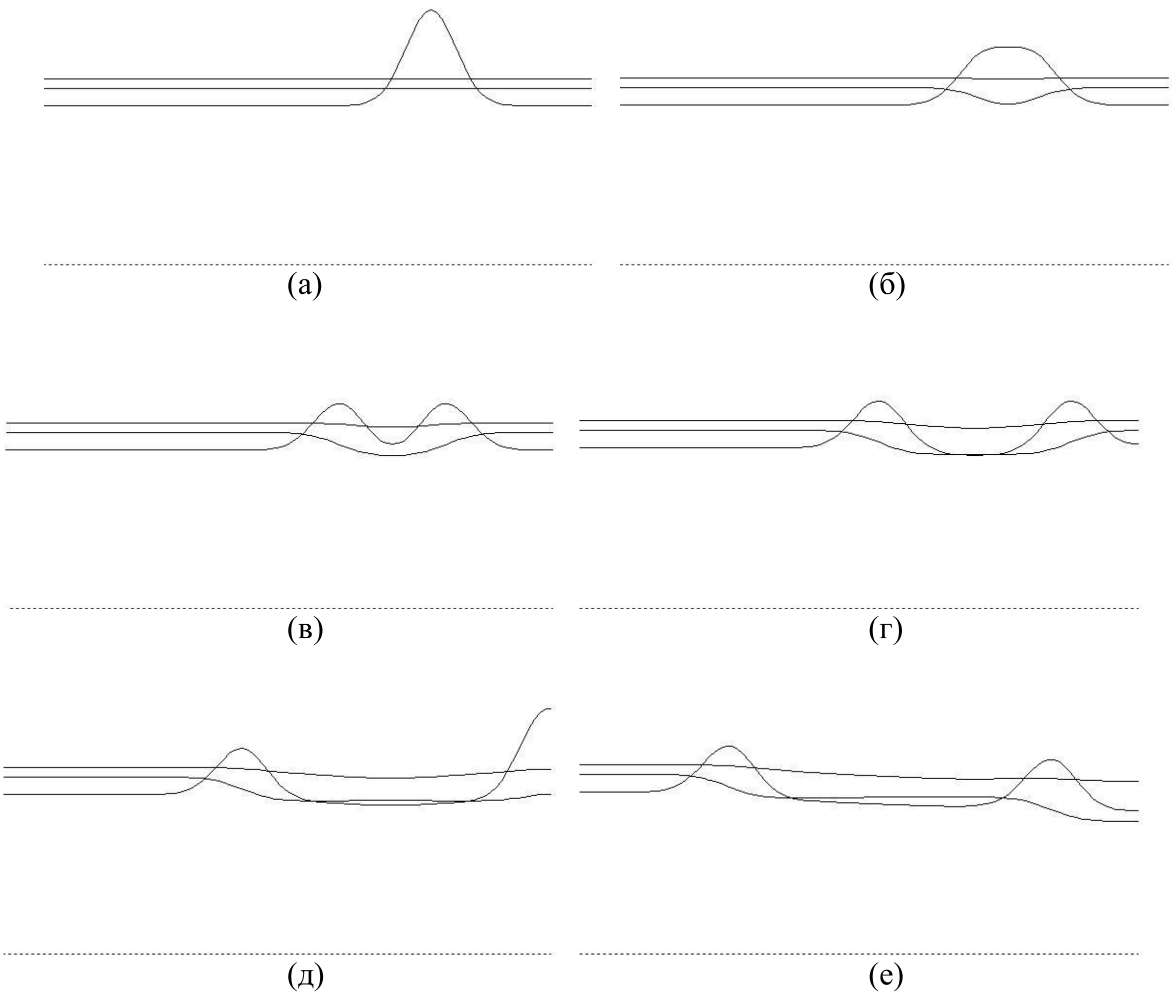


**Рис. 11. Бегущие волны в пространстве технологий в модели (1)**

Авторами было доказано, что если изменение функции $y(t,c)$ по переменной $t$ несущественно по сравнению с изменением функций $x(t,c)$ и $z(t,c)$, то в этом случае в системе (2) с диффузией капитала будут существовать бегущие волны, отражающиеся от краев, описываемые линейным гиперболическим дифференциальным уравнением:

$$ad\kappa\frac{\partial^2 z}{\partial c^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=aby^*((1-\sigma)z-\delta y^*)-\frac{\partial z}{\partial t}((1-\sigma)z^*-\delta y^*),$$

где $y^*(c)=y(t,c)$, $z^*$ - некоторое среднее значение, такое что $(\partial z/\partial t)z\approx(\partial z/\partial t)z^*$ и $\partial z(t,0)/\partial c=\partial z(t,l)/\partial c=0$.

Таким образом, мы рассмотрели дополнительные сценарии поведения модели экономики диффузионного типа в пространстве технологий.

## 4. Верификация модели экономики диффузионного типа

Верификация любой модели экономически обычно сводится к двум этапам. На первом из них происходит установление качественного соответствия поведения решений системы (2а) реальным сценариям экономического развития. Как было показано в работах [5], [19], [20], такое качественное соответствие в значительной степени существует. Например, хаотизация системы (2а) при уменьшении $\delta$ соответствует раскачиванию экономики при снижения государственного регулирования; существенное изменение параметров системы (2а) без изменения начальных значений функций $x(t,c)$, $y(t,c)$, $z(t,c)$ может привести к режиму с обострением, что соответствует разрушению экономики при неграмотно проведенных реформах и т.д. Для нахождения подобных соответствий можно обойтись и без количественной верификации модели на реальных данных.

Второй этап носит количественный характер и, в принципе, должен позволять прогнозировать развитие той или иной экономической системы в случае успешной верификации. На этом этапе модель (2а) обычно преобразуется к дискретному виду. Вместо пространства технологий может рассматриваться сообщество из $N$ регионов (стран), где состояние экономики $i$-ого региона (страны) характеризуется показателями $K_i(t)$ — капиталом, задействованным в экономике данного региона (страны) (основными фондами), $D_i(t)$ – платежеспособным спросом, $r_i(t)$ – средней нормой прибыли. Для описания состояния экономики $i$-ого региона (страны) может использоваться следующая система уравнений:

$$\begin{cases} K_i(t)-K_i(t-1)=\sum_{j=1}^{N}\kappa_{ij}(r_i-r_j)+\dfrac{\theta(1-\sigma)K_i(t)r_i(t)}{1+\theta+\eta}+\dfrac{\beta\delta\eta K_i(t)D_i(t)}{1+\theta+\eta} \\ D_i(t)-D_i(t-1)=\dfrac{\omega\theta K_i(t)}{(1+\gamma)(1+\theta+\eta)}+\dfrac{\beta(1-\delta)\eta K_i(t)D_i(t)}{1+\theta+\eta}+\dfrac{\sigma\theta K_i(t)r_i(t)}{1+\theta+\eta} \\ r_i(t)-r_i(t-1)=\alpha\left(D_i(t)-\dfrac{\theta+(\eta-1)(1+\gamma)}{(1+\gamma)(1+\theta+\eta)}K_i(t)\right) \end{cases} \tag{5}$$

Первое уравнение модели описывает изменение капитала во времени за счет инвестиций и потребления. Второе уравнение описывает изменение платежеспособного спроса в зависимости от заработной платы и потребления товаров и услуг. Третье уравнение описывает изменение нормы прибыли в результате периодического превышения предложения товаров и рабочей силы над платежеспособным спросом и денежной массой. Слагаемое $\sum_{j=1}^{N}\kappa_{ij}(r_i-r_j)$ первого уравнения описывает суммарный поток капитала в $i$-ю страну из других в предположении, что поток пропорционален разнице нормы прибыли. Матрица $(\kappa_{ij})_{i,\,j=1,\ldots,N}$ характеризует «топологию» сообщества в смысле инвестиционных связей между отдельными регионами (странами). Заметим, что слагаемое $\sum_{j=1}^{N}\kappa_{ij}(r_i-r_j)$ является разностным аналогом диффузионного оператора $-div[\kappa(c)grad(u(t,c))]$. При этом некоторые свойства решений системы (2а) будут иметь аналоги в системе (5) с конечномерным пространством собственных векторов разностного оператора диффузии.

Далее оценка модели (5) может осуществляться при помощи эконометрических методов. Однако здесь есть определенные трудности. Во-первых, такие показатели, как капитал, спрос и норма прибыли сложно оцениваются количественно, особенно в моменты структурных сдвигов в экономике, а также изменения административно-территориального деления, что подтверждает опыт стран с переходной экономикой. Во-вторых, измерение указанных показателей по регионам для стран бывшего СССР за длительный период затруднено отсутствием сопоставимой статистики на региональном (областном) уровне [21].

**Литература**


1. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. М.: Мир, 2000. 333 с.
2. Занг В.-Б. Синергическая экономика. Время и перемены в нелинейной теории: Пер. с англ. М.: Мир, 1999, 335 с.
3. Пуу Т. Нелинейные экономические системы. М.: Мир, 1999. 198 с.
4. Магницкий Н.А. Математическая модель саморазвивающейся рыночной экономики // Труды ВНИИСИ. 1991. с. 16–22.
5. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Распределенная модель саморазвивающейся рыночной экономики, Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 2: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М.: Физматлит, 2002, с. 243-262.
6. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН, 1983, т. 141, в. 2, с. 343-374.
7. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. 400 с.
8. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett., 1990, v.4, p. 1196-1199.
9. Pyragas K. Continious control of chaos by self-controling feedback // Phys. Lett. A., 1992, v. 170, p. 421-428.
10. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Управление хаосом в нелинейных динамических системах. // Дифф. ур-я, 1998, т. 34, № 11, с. 1501-1509.
11. Дернов А.В. О новых подходах к проблеме управления хаосом. //Сб. статей студентов и аспирантов. Ф-т ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. Вып. I / Под ред. проф. С.А. Ложкина. М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002, с.31–37.
12. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 320 с.
13. Дернов А.В.,Магницкий Н.А. О переходе к хаосу в одной неклассической системе уравнений «реакция-диффузия». // Дифф. ур-я, 2005, т. 41, N 12 (в печати).
14. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 432 с.
15. Дернов А.В. Регулярная динамика и диффузионный хаос в модели Брюсселятор. // Дифф. ур-я, 2002, т. 37, № 11, с. 1554-1556.
16. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Математич. сборник 1948, т. 22(64), вып 2.,с. 193–204.
17. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир,1980. 404 с.
18. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.:Мир, 1985. 419 с.
19. Дернов А.В. Диффузия капитала и спроса в модели саморазвивающейся рыночной экономики, Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 2: под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М.: Физматлит, 2002. с. 233-242.
20. Дернов А.В., Магницкий Н.А., Сидоренко В.Н., Сидоров С.В. Динамический подход к оценке состояния рыночной экономики // Стратегии динамического развития России: единство самоорганизации и управления. Материалы Первой международной научно - практической конференции. Том 2. Часть 1-я / Под общей ред. д. соц. н., проф. В.Л. Романова. М.: Изд-во «Проспект», 2004. с. 55-60.
21. Сидоренко В.Н. Природные ресурсы, окружающая среда и население регионов России за 150 лет. М.: ТЕИС, 2006. 160 с. (в печати).